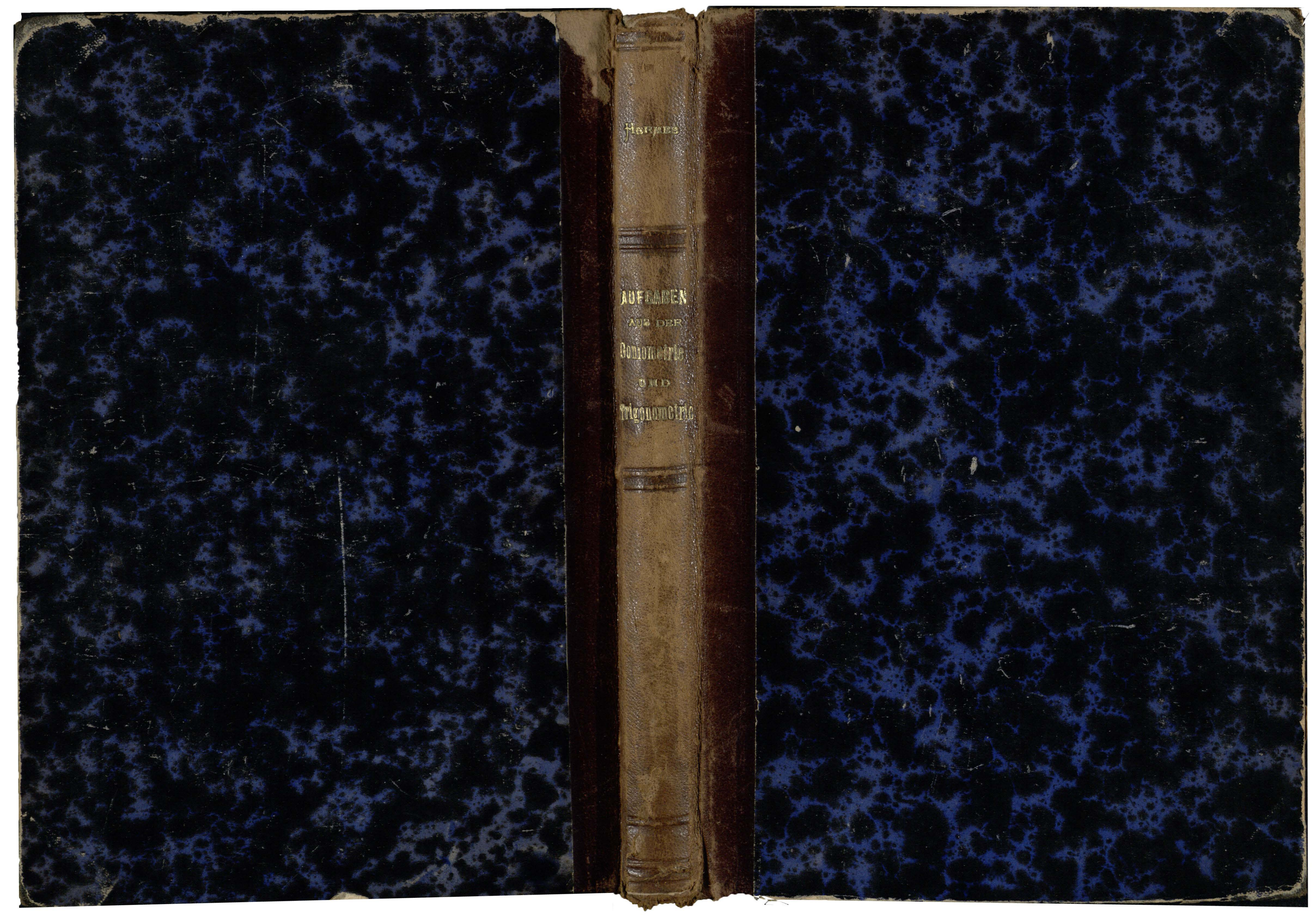
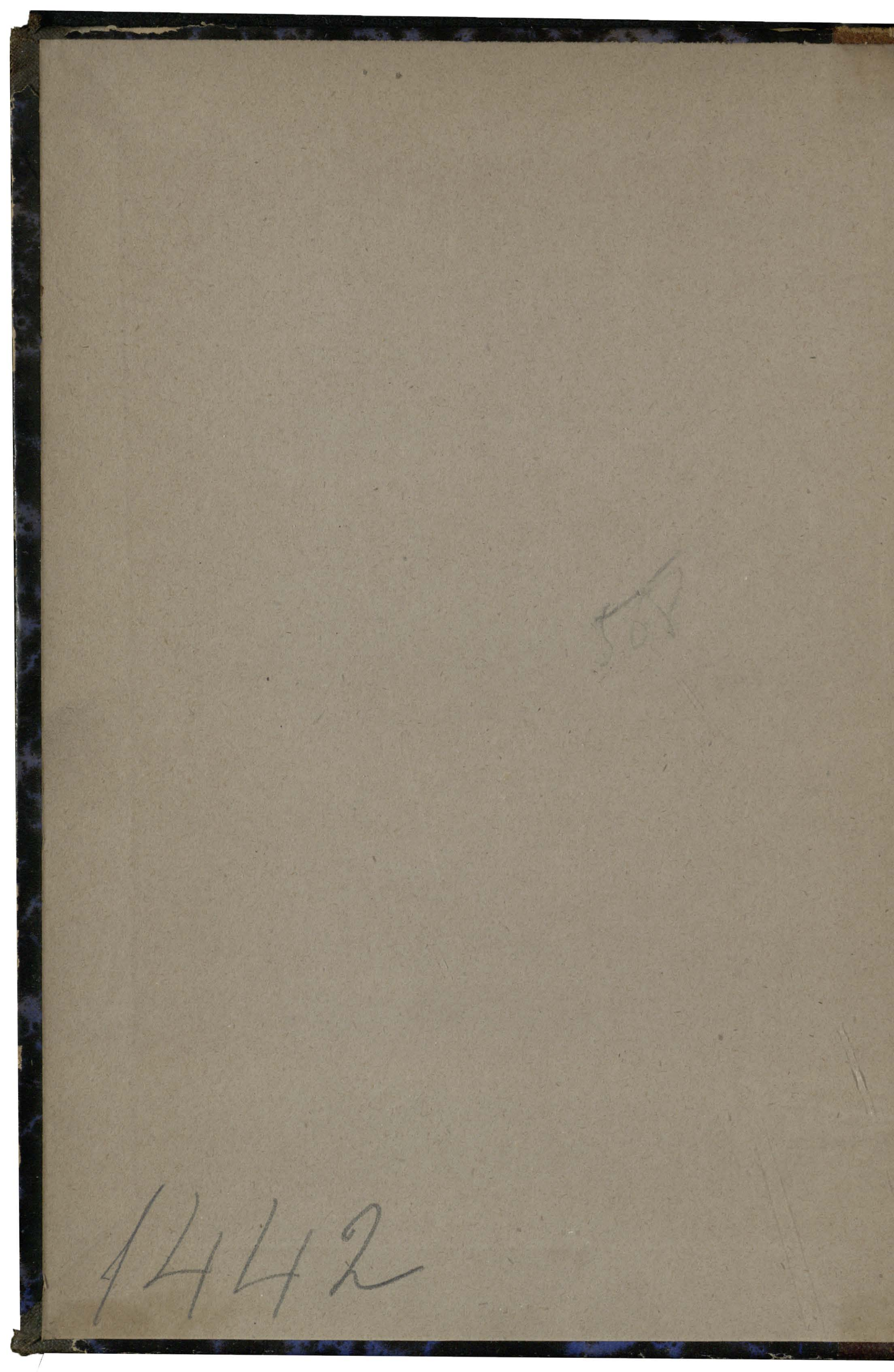

Hermes
AUFGABEN
AUS DER
Goniometrie
UND
Trigonometrie


1442

Sammlung

von

mathematischen Aufgaben.

Von

Professor Dr. **O. Hermes.**

III. Theil.

Aufgaben aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie.

Berlin 1879.
Verlag von Winckelmann & Söhne.

Sammlung von Aufgaben

aus der

Goniometrie und ebenen Trigonometrie.

Zum Gebrauch

beim Unterricht auf höheren Lehranstalten
und zum Selbststudium

zusammengestellt

von

Professor Dr. O. Hermes.

Berlin 1879.
Verlag von Winckelmann & Söhne.

Um die am Schlusse der Sammlung verzeichneten Resultate herzuleiten, werden bei den leichteren Aufgaben die Fundamentalsätze der Trigonometrie ausreichen; für die übrigen Aufgaben ist die Lösung entweder nur mit kurzen Worten angedeutet oder ausführlicher dargestellt worden. Die fehlenden Figuren sind leicht zu ergänzen. Zur Berechnung der Zahlenbeispiele sind fünfstellige Logarithmen vorausgesetzt.

Steglitz, im Juni 1879.

Inhalt.

Cap. I.

Goniometrie.

A. Numerische Werthe der trigonometrischen Funktionen und ihrer Logarithmen.

B. Algebraische Entwickelungen.

C. Trigonometrische Gleichungen.

D. Algebraische Gleichungen.

Cap. II.

Trigonometrie.

A. Rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke, regelmässige Vielecke.

B. Schiefwinklige Dreiecke.

Cap. III.

Angewandte Aufgaben.

Resultate.

Cap. I.

Goniometrie.

A. Numerische Werthe der trigonometrischen Funktionen und ihrer Logarithmen.

§ 1. Logarithmen der Funktionen.

a. Winkel im ersten Quadranten.

1. Aufsuchung der Logarithmen.

Zu bestimmen:

α. Ohne Interpolation.

1. log sin 43° 21′; log cos 24° 42′; log tg 18° 9′; log ctg 35° 53′.
2. log sin 58° 46′; log cos 85° 19′; log tg 66° 36′; log ctg 72° 27′.
3. log sin 85° 19′; log cos 34° 46′; log tg 74° 17′; log ctg 18° 3′.
4. log sin 36° 2′; log cos 78°; log tg 4° 11′; log ctg 89°.
5. log sin 52° 14′; log cos 39° 4′; log tg 84° 47′; log ctg 2° 48′.

β. Mit Interpolation.

6. log sin 28° 17,4′; log cos 34° 27,3′;
log tg 12° 48,6′; log ctg 39° 7,7′.
7. log sin 52° 5,2′; log cos 76° 54,3′;
log tg 80° 0,8′; log ctg 64° 40,6′.
8. log sin 12° 17,5′; log cos 28° 2,4′;
log tg 48° 47,8′; log ctg 76° 28,7′.
9. log sin 75° 39,3′; log cos 1° 16,4′;
log tg 7° 56,7′; log ctg 54° 7,8′.
10. log sin 2° 3,4′; log cos 48° 7,6′;
log tg 0° 6,5′; log ctg 86° 54,8′.

2. Aufsuchung der Winkel.

α. Ohne Interpolation.

Zu bestimmen den Winkel, wenn gegeben ist:

11. $\log\sin\alpha = 9,36022$; $\log\cos\beta = 9,88447$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 9,89598$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 10,05014$.

12. $\log\sin\alpha = 9,98398$; $\log\cos\beta = 8,02002$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 10,18500$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 9,50004$.

13. $\log\sin\alpha = 9,66994$; $\log\cos\beta = 9,39615$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 9,93022$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 10,80522$.

14. $\log\sin\alpha = 9,95567$; $\log\cos\beta = 9,99672$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 8,63131$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 10,03161$.

15. $\log\sin\alpha = 8,39310$; $\log\cos\beta = 9,91363$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 11,12723$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 9,84442$.

β. Mit Interpolation.

16. $\log\sin\alpha = 9,76768$; $\log\cos\beta = 9,89798$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 8,76763$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 10,22333$.

17. $\log\sin\alpha = 9,98755$; $\log\cos\beta = 8,76533$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 11,86420$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 0,02468$.

18. $\log\sin\alpha = 8,88888$; $\log\cos\beta = 9,66666$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 10,33333$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 8,99999$.

19. $\log\sin\alpha = 9,65432$; $\log\cos\beta = 9,98569$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 11,05878$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 10,00042$.

20. $\log\sin\alpha = 8,33057$; $\log\cos\beta = 8,77922$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 7,89187$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 8,45728$.

Bestimmung eines Winkels aus einem Funktionalwerth desselben.

21. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\cos\beta = \frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\delta = \frac{4}{5}$.

22. $\sin\alpha = 0,9$; $\cos\beta = 0,6$; $\operatorname{tg}\gamma = 0,4$; $\operatorname{ctg}\delta = 0,1$.

23. $\sin\alpha = \sqrt{0,75}$; $\cos\beta = \sqrt{0,5}$; $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $\operatorname{ctg}\delta = \sqrt{2}$.

24. $\sin\alpha = \log 2$; $\cos\beta = \log 5$; $\operatorname{tg}\gamma = \log 8$; $\operatorname{ctg}\delta = \log 10$.

25. $\sin\alpha = \operatorname{tg} 18^\circ$; $\cos\beta = \operatorname{ctg} 72^\circ$; $\operatorname{tg}\gamma = \cos 45^\circ$; $\operatorname{ctg}\delta = \sin 60^\circ$.

---

26 a. $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{1-\sqrt{0,8}}$; $\operatorname{ctg}\delta = \sqrt{1+\sqrt{0,8}}$.

b. $\log\sin\alpha = -\frac{2}{3}$; $\log\cos\beta = -\sqrt{0,007}$;

$\operatorname{tg}\gamma = (1,05)^{11}$; $\operatorname{ctg}\delta = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$.

27. $\sin\alpha = \frac{0,3\sqrt{0,5}}{1,0035}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{0.275}}{1,2345}$;

$\operatorname{tg}\gamma = 0,3^{0,7}$; $\operatorname{ctg}\delta = \frac{(3,5)^5}{718,26}$.

28. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{0,07}}{\sqrt[3]{1,2345}}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{53}-7}{0,543}$;

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{11,234}-3}{0,271}$; $\operatorname{ctg}\delta = \frac{5}{7}\cdot\frac{(0,3)^{0,3}}{\sqrt[4]{7,523}}$.

29. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2,345}-1}{3,57}$; $\cos\beta = \sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$;

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1,2^{1,2}}{3^{0,05}}$; $\operatorname{ctg}\delta = 1,05^{1,05}$.

30. $\sin\alpha = \frac{0,34\,.\,\sqrt{0,8901}}{1,2345}$; $\cos\beta = \frac{2,345}{5,432}$;

$\operatorname{tg}\gamma = \sin\lambda^{\cos\mu}$; wenn $\lambda = 50^\circ$; $\mu = 70^\circ$;

$\operatorname{ctg}\delta = \sin\lambda^{\cos\mu}$; wenn $\lambda = 35^\circ$; $\mu = 53^\circ$.

b. Winkel in späteren Quadranten.

Den Werth zu bestimmen von:

31. sin 100°; cos 200°; tg 300°; ctg 400°;
32. sin 250°; cos 350°; tg 450°; ctg 150°;
33. sin 320°; cos 420°; tg 120°; ctg 220°;
34. sin 480°; cos 180°; tg 280°; ctg 380°;
35. sin 500°; cos 600°; tg 800°; ctg 1000°;

Den Winkel zu bestimmen, wenn gegeben ist:

36. $\sin\alpha = -\cos 14^\circ\,29,3'$; $\cos\beta = -\sin 78^\circ\,9,4'$;
$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{ctg} 33^\circ\,47,7'$; $\operatorname{ctg}\delta = -\operatorname{tg} 80^\circ\,0,8'$.

37. $\sin\alpha = \operatorname{ctg} 77^\circ\,7,7'$; $\cos\beta = \operatorname{tg} 44^\circ\,44,4'$;
$\operatorname{tg}\gamma = \cos 55^\circ\,55,5'$; $\operatorname{ctg}\delta = \sin 66^\circ\,6,6'$.

38. $\log\sin\alpha = 8,88888$; $\log\cos\beta = 9,66666$;
$\log\operatorname{tg}\gamma = 10,33333$; $\log\operatorname{ctg}\delta = 8,99999$.

39. $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$; $\cos\beta = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{5}{6}$; $\operatorname{ctg}\delta = -\frac{6}{7}$.

40. $\sin\alpha = -\sqrt{0,1}$; $\cos\beta = \sqrt[3]{0,3}$; $\operatorname{tg}\gamma = (0,75)^{0,7}$; $\operatorname{ctg}\delta = -\sqrt[5]{0.1}$.

§ 2. Darstellung von Funktionalwerthen ohne Anwendung der Logarithmen-Tafeln.

Den Werth zu bestimmen von:

1. $\sin 30^\circ$; $\sin 45^\circ$; $\sin 60^\circ$; $\operatorname{tg} 60^\circ$.

2. $\cos 30^\circ$; $\cos 45^\circ$; $\cos 60^\circ$; $\operatorname{ctg} 45^\circ$.

3. $\sin 120^\circ$; $\cos 150^\circ$; $\operatorname{tg} 135^\circ$; $\operatorname{ctg} 120^\circ$.

4. $\sin 225^\circ$; $\cos 240^\circ$; $\operatorname{tg} 300^\circ$; $\operatorname{ctg} 315^\circ$.

5. $\sin 300^\circ$; $\cos 330^\circ$; $\operatorname{tg} 240^\circ$; $\operatorname{ctg} 360^\circ$.

---

6. $\sin 15^\circ$; $\cos 15^\circ$; $\operatorname{tg} 15^\circ$; $\operatorname{ctg} 15^\circ$.

7. $\sin 22^\circ 30'$; $\cos 22^\circ 30'$; $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$; $\operatorname{ctg} 22^\circ 30'$.

8. $\sin 75^\circ$; $\cos 67^\circ 30'$; $\operatorname{tg} 75^\circ$; $\operatorname{ctg} 67^\circ 30'$.

9. $\sin 105^\circ$; $\cos 165^\circ$; $\operatorname{tg} 255^\circ$; $\operatorname{ctg} 285^\circ$.

10. $\sin 337^\circ 30'$; $\cos 247^\circ 30'$; $\operatorname{tg} 202^\circ 30'$; $\operatorname{ctg} 112^\circ 30'$.

---

11. $\sin 18^\circ$; $\cos 18^\circ$; $\operatorname{tg} 18^\circ$; $\operatorname{ctg} 18^\circ$.

12. $\sin 36^\circ$; $\cos 36^\circ$; $\operatorname{tg} 36^\circ$; $\operatorname{ctg} 36^\circ$.

13. $\sin 54^\circ$; $\cos 144^\circ$; $\operatorname{tg} 126^\circ$; $\operatorname{ctg} 234^\circ$.

14. $\sin 24^\circ$; $\sin 48^\circ$.

15. $\cos 48^\circ$; $\cos 12^\circ$.

16. $\sin 7^\circ 30$; $\cos 33^\circ 45'$.

17. $\cos 37^\circ 30'$; $\sin 78^\circ 45'$.

18. $\sin 6^\circ$.

19. $\cos 27^\circ$.

20. $\sin 27^\circ$.

(Vorausgesetzt die Fundamentalformeln.)

Den Werth zu bestimmen von:

21. $\sin 75^\circ - \cos 75^\circ$.

22. $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$.

23. $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$.

24. $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$.

25. $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ$.

26. $\sin 54^\circ \,.\, \sin 18^\circ$.

27. $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ$.

28. $\cos 36^\circ \cdot \cos 54^\circ$.

29. $\operatorname{tg} 18^\circ + \dfrac{1}{\cos 18^\circ}$.

30. $\cos 18^{\circ 2} + \cos 54^{\circ 2}$.

---

31. $\operatorname{tg} 18^{\circ 2} + \operatorname{ctg} 36^{\circ 2}$.

32. $\operatorname{tg} 36^{\circ 2} + \operatorname{ctg} 18^{\circ 2}$.

33. $\operatorname{tg} 67^\circ 30' - \operatorname{ctg} 67^\circ 30'$.

34. $\sin 54^{\circ 2} + \sin 18^{\circ 2}$.

35. $\cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ$. (Vgl. § 18 Aufg. 42).

36. $\cos 36^\circ + \sin 18^\circ$.

37. $\sin 36^\circ + \cos 18^\circ$.

38. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ$.

39. $\dfrac{\sin 24^\circ + \cos 6^\circ}{\cos 36^\circ}$.

40. $\dfrac{\sin 84^\circ - \cos 66^\circ}{\sin 54^\circ}$.

§ 3. Abhängigkeit der Funktionen von einander.

Gegeben:	Gesucht:
1. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$	
2. $= \frac{3}{5}$	
3. $= \frac{2}{3}$	$\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, Winkel α.
4. $= \sqrt{\frac{1}{2}}$	
5. $= \lambda$	
6. $\cos\alpha = \frac{8}{17}$	
7. $= -\frac{12}{13}$	
8. $= 0{,}1$	$\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, α.
9. $= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	
10. $= \lambda$	
11. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$	
12. $= 2$	
13. $= -1$	$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, α.
14. $= \sqrt{5-2\sqrt{5}}$	
15. $= \lambda$	
16. $\operatorname{ctg}\alpha = 3$	
17. $= 2{,}4$	
18. $= -\sqrt{3}$	$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, α.
19. $= \sqrt{2}-1$	
20. $= \lambda$	
21. $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$	
22. $\cos 2\alpha = \lambda$	
23. $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$	$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, α.
24. $\operatorname{tg} 2\alpha = -1$	
25. $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\sqrt{\frac{1}{3}}$	
26. $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$	
27. $\cos\frac{\alpha}{2} = \lambda$	
28. $\sin\frac{\alpha}{2} = \lambda$	$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.
29. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \lambda$	
30. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \lambda$	

31. Gegeben $\sin\alpha$, gesucht $\sin 3\alpha$.
32. $\cos\alpha$, $\cos 3\alpha$.
33. $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$.
33 a. $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg} 3\alpha$.
34. $\sin\alpha$ und $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$.
35. $\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$.

36. Gegeben $\sin 3\alpha$ und $\cos 2\alpha$, gesucht $\sin\alpha$.
37. $\cos 3\alpha$ und $\cos 2\alpha$, $\cos\alpha$.
38. $\sin\alpha$ $\sin\alpha/3$ für $\alpha = 180°$.
39. $\cos\alpha$ $\cos\alpha/3$ für $\alpha = 90°$.
40. $\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha/3$ für $\alpha = 45°$.

B. Algebraische Entwickelungen.

§ 4. Umformungen zur Vereinfachung logarithmischer Rechnungen.

(Vorausgesetzt die Fundamentalformeln.)

1. $\sin\alpha + \cos\alpha$; $\cos\alpha - \sin\alpha$.
2. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.
3. $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$; $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}$.
4. $\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$; $\operatorname{ctg}\alpha^2 - \operatorname{tg}\alpha^2$.
5. $\operatorname{tg}\alpha^2 - \frac{1}{\cos\alpha^2}$; $\frac{1}{\sin\alpha^2} - \frac{1}{\cos\alpha^2}$.
6. $1 + \cos\alpha$; $1 - \cos\alpha$.
7. $1 + \sin\alpha$; $1 - \sin\alpha$.
8. $\frac{1}{\cos\alpha} - 1$; $\frac{1}{\sin\alpha} + 1$.
9. $1 + \operatorname{tg}\alpha^2$; $1 - \operatorname{ctg}\alpha^2$.
10. $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$; $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.
11. $1 + \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha - 1$.
12. $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$; $\frac{\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + 1}$.

13. $\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha$; $\frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha$.

14. $\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$; $\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha$.

15. $2\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}$; $\frac{1}{2\sin\alpha} + \cos\alpha$.

16. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

17. $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\frac{1-\sin 2\alpha}{2}$; $\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$.

18. $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$; $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$; $\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$.

19. $\sin(60^\circ+\alpha) - \sin(60^\circ-\alpha)$; $\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)$.

20. $\sin(60^\circ+\alpha) + \sin(60^\circ-\alpha)$; $\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)$.

21. $\cos(45^\circ+\alpha) + \cos(45^\circ-\alpha)$; $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$.

22. $\sin(45^\circ+\alpha)^2 - \sin(45^\circ-\alpha)^2$; $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)^2-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)^2$.

23. $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)^2+1}$; $\frac{\sin(45^\circ+\alpha)-\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)}$.

24. $\cos\alpha + \cos(\alpha+120^\circ) + \cos(\alpha+240^\circ)$.

25. $\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+120^\circ) + \cos\alpha\cdot\cos(\alpha+240^\circ) +$
$+ \cos(\alpha+120^\circ)\cdot\cos(\alpha+240^\circ)$.

26. $\sin\alpha + \cos\beta$; $\cos\alpha - \sin\beta$.

27. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$; $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta$.

28. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$; $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

29. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$; $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

30. $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta}$; $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}$.

31. $\sin\alpha^2 - \sin\beta^2$; $\cos\alpha^2 - \cos\beta^2$.

32. $\sin\alpha^2 - \cos\beta^2$; $\operatorname{tg}\alpha^2 - \operatorname{tg}\beta^2$.

33. $\operatorname{ctg}\alpha^2 - \operatorname{ctg}\beta^2$; $\operatorname{ctg}\alpha^2 - \operatorname{tg}\beta^2$.

34. $(\sin\alpha + \cos\beta)(\cos\beta - \sin\alpha)$; $(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$.

35. $(\sin\alpha - \sin\beta)(\cos\alpha - \cos\beta)$; $(\sin\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\sin\beta)$.

36. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$; $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$.

37. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

38. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$.

39. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$; $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$.

40. $\frac{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}}{\frac{1}{\sin\beta}-\frac{1}{\sin\alpha}}$; $\frac{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}}$.

41. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha$.

42. $\sin\alpha\,(2\cos 2\alpha+1)$; $\cos\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)$.

43. $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$; $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

44. $\cos 2\alpha\cdot\sin 4\alpha-\sin\alpha\cdot\cos 5\alpha$.

45. $\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha+\cos\alpha\cdot\cos 5\alpha$.

46. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)-\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)$. (Vgl. § 32, Aufg. 40.)

47. $\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta+\gamma)$.

48. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\beta+\gamma)+\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

49. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\gamma)-\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

50. $\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\beta-\gamma)+\sin\beta\cdot\cos(\alpha-\beta+\gamma)$.

51. $\cos(\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha+4\beta)-\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(2\alpha+5\beta)$.

52. $\sin(\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha+4\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(2\alpha+5\beta)$.

53. $\sin(\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha+6\beta)-\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(2\alpha+5\beta)$.

54. $\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\cdot\sin(\alpha-\beta)$.

55. $\cos\alpha\cdot\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma\cdot\sin(\alpha-\beta)$.

56. $\sin\alpha+\cos\alpha-1$; $\cos\alpha-\sin\alpha+1$.

57. $\frac{\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

58. $\frac{\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$; $\frac{\sin\beta-\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

59. $\sin(\alpha+\beta)^2-\sin\alpha^2-\sin\beta^2$; $\cos(\alpha+\beta)^2-\sin\alpha^2-\cos\beta^2$.

60. $\sin(\alpha+\beta)^2-\cos\alpha^2-\cos\beta^2$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

§ 5. Summen der trigonometrischen Funktionen der Winkel eines Dreiecks.

Es seien α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, d. h.

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R,$$

so sind, soweit es thunlich erscheint, in Produkte zu verwandeln die Summen:

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.
2. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.
3. $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}$.
4. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma$.
5. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma$.
6. $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}$.
7. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.
8. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$.
9. $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$.
10. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma$.
11. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma$.
12. $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}$.

---

13. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$.
14. $\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma$.
15. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.
16. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.
17. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.
18. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.
(Vergl. § 37, Aufg. 32.)
19. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$.
20. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\gamma$.
21. $\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta - \operatorname{tg}2\gamma$.
22. $\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

---

23. $\sin\alpha + \sin\beta + \cos\gamma$.
24. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \sin 2\gamma$.
25. $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$.
26. $\cos\alpha + \cos\beta - \sin\gamma$.
27. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \sin 2\gamma$.
28. $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}$.
29. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2$.
30. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2$.
31. $\sin 2\alpha^2 + \sin 2\beta^2 - \sin 2\gamma^2$.
32. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2$.
33. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - \cos\gamma^2$.
34. $\cos\frac{\alpha^2}{2} + \cos\frac{\beta^2}{2} - \cos\frac{\gamma^2}{2}$.

---

35. $\sin\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\beta - \gamma^2}{2}$; $\quad \cos\frac{\beta - \gamma^2}{2} - \cos\frac{\alpha^2}{2}$.
36. $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 - \cos\beta - \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}$.
37. $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}$.
38. $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}$.
39. $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 - \cos\beta - \cos\gamma + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}$.

40. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma.$

41. $\cos\alpha + \cos\beta - 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$

42. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

43. $\sin\frac{\alpha^2}{2} + \sin\frac{\beta^2}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$

44. $\sin\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\beta^2}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$

45. $\sin\beta + \sin\gamma - 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}.$

46. $\sin\beta + \sin\gamma + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$

47. $\frac{\sin\alpha^2(\cos\beta^2 - \cos\gamma^2) + \sin\beta^2(\cos\gamma^2 - \cos\alpha^2)}{\sin\gamma^2}.$

48. $\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2} + \sin\beta\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} +$
$+ \sin\gamma\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

49. $\sin\alpha^3\cdot\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta^3\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma^3\sin(\alpha-\beta).$

50. $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}.$

51. $\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}.$

52. $1 - \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$

53. $\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}} - 1.$

54. $\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos\alpha} + \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\gamma} + 2.$

55. $\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos\alpha} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} + 2.$

56. $1 - \cos\frac{\alpha^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\beta^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

57. $\cos\frac{\alpha^2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta^2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} -$
$\sin\frac{\gamma^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - 1$.

58. $\sqrt{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \times \sqrt{-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \times$
$\times \sqrt{\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma} \times \sqrt{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}$.

59. $\sqrt{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} \times \sqrt{-\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} \times$
$\times \sqrt{\sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma} \times \sqrt{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma}$.

60. $\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{-\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}}$
$\times \sqrt{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}} \times \sqrt{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}}$.

§ 6. Allgemeinere Summen gleichartiger Funktionen.

Aufg. 1—8. Es seien α, β, γ, δ die Winkel eines Vierecks und demnach

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R,$$

(oder die Summe dieser Winkel gleich einem beliebigen Vielfachen von $4R$), so sind, soweit es thunlich erscheint, in Produkte zu verwandeln die Summen:

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta$. (Vergl. § 29, Aufg. 23 u. 34.)
2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$.
3. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma - \sin\delta$.
4. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos\delta$.
5. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 + \sin\delta^2$.
6. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + \cos\delta^2$.
7. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2 - \sin\delta^2$.
8. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - \cos\delta^2$.

Aufg. 9—16. Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2R$, in Produkte zu verwandeln:

9. $\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin\gamma\cdot\sin\delta$.
10. $\sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\gamma\cdot\cos\delta$.
11. $\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos\gamma\cdot\cos\delta$.
12. $\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\gamma\cdot\sin\delta$.
13. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta$
14. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta$.
15. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma} + \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma\cdot\sin\delta} + \frac{\sin(\delta+\alpha)}{\sin\delta\cdot\sin\alpha}$.
16. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2 - \sin\delta^2$.

Für beliebige Winkel α, β, γ in Produkte zu verwandeln:

17. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta-\gamma)$.

18. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta-\gamma)$.

19. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

20. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

21. $\sin\alpha + \sin\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

22. $\cos\alpha + \cos\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

23. $\sin\alpha + \sin\beta - \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

24. $\cos\alpha + \cos\beta - \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

25. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$.

26. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$.

27. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma$.

28. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\gamma$.

29. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2 - \sin(\alpha+\beta-\gamma)^2$.

30. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - \cos(\alpha+\beta-\gamma)^2$.

31. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

32. $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

33. $\sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)$.

34. $\cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) + \cos(\alpha-\beta)$.

35. $\sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) - \sin(\alpha-\beta)$.

36. $\cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)$.

37. $\operatorname{tg}(\beta-\gamma) + \operatorname{tg}(\gamma-\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

38. $\operatorname{ctg}(\beta-\gamma) + \operatorname{ctg}(\gamma-\alpha) - \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

39. $\sin(\beta-\gamma)^2 + \sin(\gamma-\alpha)^2 + \sin(\alpha-\beta)^2$.

40. $\sin(\beta-\gamma)^2 + \sin(\gamma-\alpha)^2 - \sin(\alpha-\beta)^2$.

Zu reduciren die Quotienten:

41. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha - \sin 3\alpha}{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}$.

42. $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 2\alpha - \sin\alpha}{\sin 3\alpha - \sin 2\alpha + \sin\alpha}$.

43. $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin\alpha}{\sin 3\alpha - \sin 2\alpha + \sin\alpha}$.

44. $\dfrac{\sin 3\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin\alpha}{\sin 3\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin\alpha}$.

45. $\dfrac{\cos 3\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos\alpha}{\cos 3\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos\alpha}$.

46. $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos\alpha}$.

47. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha + \sin(\alpha-\beta)}$.

48. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + 2\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta)}$.

49. $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 3\alpha - \sin 2\alpha + \sin \alpha}$.

50. $\dfrac{\sin 4\alpha - \sin 3\alpha + \sin 2\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha - \sin \alpha}$.

51! $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha}{\sin 4\alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha - \sin \alpha}$.

52. $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 3\alpha + \cos 2\alpha - \cos \alpha}{\cos 4\alpha + \cos 3\alpha - \cos 2\alpha - \cos \alpha}$.

53. $\dfrac{\cos 3\alpha + \cos 2\alpha - \cos \alpha - 1}{\cos 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos \alpha - 1}$.

54. $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos \alpha - 1}{\cos 3\alpha - \cos 2\alpha - \cos \alpha + 1}$.

55. $\dfrac{\sin(\alpha + 3\beta) + \sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha}{\sin(\alpha + 3\beta) - \sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha}$.

56. $\dfrac{\cos(\alpha + 3\beta) - \cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\cos(\alpha + 3\beta) - \cos(\alpha + 2\beta) - \cos(\alpha + \beta) + \cos \alpha}$.

§ 7. Trigonometrische Reihen.

In ein Produkt zu verwandeln, soweit es thunlich erscheint:

1. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.
2. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdot\cdot + \sin 8\alpha$, d. i. $\sum\limits_{k=1}^{k=8} \sin k\alpha$.
3. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin 16\alpha$, d. i. $\sum\limits_{1}^{16} \sin k\alpha$.*)
4. $\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha + 3\beta)$.

4a. $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha + 3\beta)$.

Zu summiren n Glieder der Reihe:

5. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdot\cdot$, d. i. $\sum\limits_{1}^{n} \sin k\alpha$.

---

*) Der Summationsindex ist hier und in den folgenden Summenausdrücken k und statt $\sum\limits_{k=1}^{k=n}$ ist kurz geschrieben $\sum\limits_{1}^{n}$. (Vergl. die Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und niederen Analysis des Verfassers § 34.)

6. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots$, d. i. $\sum_1^n \sin(2k-1)\alpha$.

7. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots$, d. i. $\sum_1^n \sin(\alpha+(k-1)\beta)$.

8. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots$, d. i. $\sum_1^n \cos k\alpha$.

9. $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots$, d. i. $\sum_1^n \cos(2k-1)\alpha$.

10. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots$, d. i. $\sum_1^n \cos(\alpha+(k-1)\beta)$.

Zu summiren:

11. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \sin 4\alpha + \cdots$, $\sum_1^{2n-1} (-1)^{k-1} \cdot \sin k\alpha$.

12. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \sin 4\alpha + \cdots$, $\sum_1^{2n} (-1)^{k-1} \sin k\alpha$.

13. $\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) - \cdots$, $\sum_0^n (-1)^k \cdot \sin(\alpha+k\beta)$.

14. $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \cdots$, $\sum_0^{2n-1} (-1)^k \cdot \sin(2k+1)\alpha$.

15. $\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \cdots$, $\sum_0^{2n} (-1)^k \sin(2k+1)\alpha$.

16. $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cdots$, $\sum_1^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \cos k\alpha$.

17. $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cdots$, $\sum_1^{2n+1} (-1)^{k-1} \cos k\alpha$.

18. $\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cdots$, $\sum_0^{2n-1} (-1)^k \cdot \cos(2k+1)\alpha$.

19. $\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cdots$, $\sum_0^{2n} (-1)^k \cdot \cos(2k+1)\alpha$.

20. $\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) - \cdots$, $\sum_0^{2n} (-1)^k \cdot \cos(\alpha+k\beta)$.

---

21. $\sin\alpha^2 + \sin 2\alpha^2 + \sin 3\alpha^2 + \cdots$, $\sum_1^n \sin k\alpha^2$. (Vergl. § 37, Aufg. 6.)

22. $\cos\alpha^2 + \cos 2\alpha^2 + \cos 3\alpha^2 + \cdots$, $\sum_1^n \cos k\alpha^2$.

23. $\sin\alpha^2 + \sin 3\alpha^2 + \sin 5\alpha^2 + \cdots$, $\sum_0^{n-1} \sin(2k+1)\alpha^2$.

24. $\sin\alpha^2 + \sin(\alpha+\beta)^2 + \sin(\alpha+2\beta)^2 + \cdots$, $\sum_0^{n-1} \sin(\alpha+k\beta)^2$.

25. $\cos\alpha^2 + \cos(\alpha+\beta)^2 + \cos(\alpha+2\beta)^2 + \cdot\cdot, \quad \sum_0^{n-1}\cos(\alpha+k\beta)^2.$

26. $\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \cdot\cdot, \quad \sum_1^n k\sin k\alpha.$

27. $\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + 3\cos 3\alpha + \cdot\cdot, \quad \sum_1^n k\cos k\alpha.$

28. $\sin(\alpha+\beta) + 2\sin(\alpha+2\beta) + 3\sin(\alpha+3\beta) + \cdot\cdot, \sum_1^n k\sin(\alpha+k\beta).$

29. $\cos(\alpha+\beta) + 2\cos(\alpha+2\beta) + \cdot\cdot, \quad \sum_1^n k\cos(\alpha+k\beta).$

30. $\cos\alpha + 3\cos 3\alpha + 5\cos 5\alpha + \cdot\cdot, \quad \sum_1^n (2k-1)\cos(2k-1)\alpha.$

---

31. $\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta + \sin 3\alpha\cdot\sin 3\beta + \cdot\cdot, \sum_1^n \sin n\alpha\cdot\sin n\beta.$

32. $\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 3\alpha\cdot\cos 3\beta + \cdot\cdot, \sum_1^n \sin n\alpha\cdot\cos n\beta.$

33. $\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 3\alpha\cdot\cos 3\beta + \cdot\cdot, \sum_1^n \cos n\alpha\cdot\cos n\beta.$

34. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma\cdot\sin\delta}.$

35. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\delta)}{\cos\gamma\cdot\cos\delta}.$

36. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma} + \dfrac{\cos(\gamma-\delta)}{\cos\gamma\cdot\cos\delta} - \dfrac{\cos(\delta-\alpha)}{\cos\delta\cdot\cos\alpha}.$

37. $\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} + \cdot\cdot, \quad \sum_1^n \dfrac{1}{\sin k\alpha\cdot\sin(k+1)\alpha}.$

38. $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha} + \dfrac{1}{\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha} + \cdot\cdot,$ d. i.

$$\sum_1^n \frac{1}{\cos(k-1)\alpha\cdot\cos k\alpha}.$$

39. $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha} + \dfrac{1}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha} - \cdot\cdot,$ d. i.:

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{\cos 2(k-1)\alpha\cdot\sin(2k-1)\alpha} - \frac{1}{\sin(2k-1)\alpha\cdot\cos 2k\alpha}\right).$$

40. $\dfrac{1}{\cos\alpha\sin 2\alpha} - \dfrac{1}{\sin 2\alpha\cos 3\alpha} + \dfrac{1}{\cos 3\alpha\cdot\sin 4\alpha} - \cdot\cdot,$

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{\cos(2k-1)\alpha\cdot\sin 2k\alpha} - \frac{1}{\sin 2k\alpha\cdot\cos(2k+1)\alpha}\right).$$

---

41. $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+2\beta)}+\cdots,$

$$\sum_1^n\frac{1}{\sin[\alpha+(k-1)\beta]\cdot\sin(\alpha+k\beta)}.$$

42.*) $\frac{1}{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)}+\cdots,$

$$\sum_1^n\frac{1}{\cos[\alpha+(k-1)\beta]\cdot\cos(\alpha+k\beta)}.$$

43. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha}+\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha\cdot\cos 6\alpha}+\cdots,$

$$\sum_1^n\frac{\sin k\alpha}{\cos\frac{k(k-1)}{2}\alpha\cdot\cos\frac{k(k+1)}{2}\alpha}.$$

44. $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+3\beta)}+\cdots,$

$$\sum_1^n\frac{\sin k\beta}{\sin\left(\alpha+\frac{k(k-1)}{2}\beta\right)\sin\left(\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\beta\right)}.$$

---

§ 7a. Umformung algebraischer Ausdrücke bei der Rechnung mit Logarithmen.

Gegeben die Logarithmen von a und b, $a > b$, gesucht

1. $\log(a+b)$. **2.** $\log(a-b)$. **3.** $\frac{a-b}{a+b}$.

4. $\frac{a^2-1}{a^2+1}$. **5.** $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

6. $\sqrt{a^2+b^2}$. **7.** $\sqrt{a^2-b^2}$. **8.** $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$.

9. $\sqrt{a^2-2ab\cdot\cos\gamma+b^2}$. **10.** $\sqrt{a^2+2ab\ \cos\gamma+b^2}$.

Zu berechnen:

11. $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$. **12.** $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

(In den Aufg. 9—12 sind α, β, γ gegebene Winkel.)

---

*) Durch welche Substitution lässt sich die Summe in Aufgabe 42 aus der in Aufgabe 41 ableiten?

C. Trigonometrische Gleichungen.

§ 8. Gleichungen von einfacher Form.

(Die mit einem * versehenen Aufgaben führen auf gemischte quadratische Gleichungen).

1. $\sin x = 2 \cos x$.
2. $\cos x = 2 \sin x$.
3. $\operatorname{tg} x = 4 \sin x$.
4. $\operatorname{ctg} x = 2 \cos x$.
*5. $\sin x = \operatorname{ctg} x$.
*6. $\cos x = \operatorname{tg} x$.
*7. $3 \sin x = 2 \operatorname{ctg} x$.
*8. $4 \cos x = 3 \operatorname{tg} x$.
9. $3 \sin x = 2(1 - \cos x)$.
10. $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$.

11. $\sin \frac{x}{2} = \cos x$.
12. $\sin 2x = \cos x$.
13. $\sin 2x = \frac{3}{2} \sin x$.
14. $\sin 2x = \sqrt{2} \cdot \sin x$.
15. $\sin 2x = 1{,}6 \cos x$.
*16. $\cos 2x = \frac{2}{3} \cos x$.
*17. $\cos 2x = \frac{3}{2} \cos x$.
*18. $\cos 2x = \frac{4}{5} \sin x$.
*19. $\cos 2x = \frac{5}{4} \sin x$.
20. $\cos 2x = - \sin x$.

21. $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$.
*22. $\operatorname{tg} x = 2 \cos \frac{x}{2}$.
*23. $\operatorname{tg} 2x = 6 \sin x$.
24. $\operatorname{ctg} 2x = - \operatorname{ctg} x$.
25. $2 \operatorname{ctg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$.
26. $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{ctg} x$.
27. $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.
28. $\operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x$.
29. $4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 \sin x$.
*30. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \cos x$.

31. $2 \sin 3x = 3 \sin x$.
32. $4 \sin 3x = - 3 \sin x$.
33. $\sin 3x = \sqrt{3} \cdot \sin x$.
34. $3 \cos 3x = 2 \cos x$.
35. $\operatorname{tg} 3x = 4 \operatorname{tg} x$.
36. $5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} x$.
*37. $\sqrt{2} \cdot \sin 3x = \sqrt{3} \cdot \sin 2x$.
*38. $\sin 5x = \sqrt{5} \cdot \sin x$.
*39. $5 \cos 5x = 3 \cos 3x$.
*40. $\sqrt{3} \cdot \sin 5x = \sqrt{5} \cdot \sin 3x$.
*41. $4 \sin x \cdot \sin 3x = 1$.
*42. $\cos x \cdot \cos \frac{x^2}{2} = - 0{,}1$.
41a. $\operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \alpha^2$.
42a. $\sin 2x \cdot \cos x = \alpha \sin 3x$.

43. $\cos 3x = \alpha \cdot \cos x \cdot \cos 2x.$ **44.** $2\cos 3x = \cos x \cos 2x.$
45. $\sin 3x = \alpha \cdot \sin x \cdot \cos 2x.$ **46.** $\sin 3x = 4\sin x \cdot \cos 2x.$
***47.** $\cos 4x = \alpha \cdot \cos x \cdot \cos 3x.$ ***48.** $\cos 4x = \cos x \cdot \cos 3x.$
***49.** $\sin 5x = \alpha \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x.$ ***50.** $\cos x \cdot \sin 5x = \alpha \sin 6x.$

§ 9. Quadratische Gleichungen.*)

1. $\sin x^2 + \sin x = \frac{3}{4}.$ **2.** $5\cos x^2 + 3\cos x = 2.$
3. $4\,\mathrm{tg}\, x^2 + 12\,\mathrm{tg}\, x = 7.$ **4.** $\mathrm{ctg}\, x^2 - 5\,\mathrm{ctg}\, x = 1.$
5. $12\sin x^2 + 5\sin x = 3.$ **6.** $8\cos x^2 - 2\cos x = 3.$
7. $3\,\mathrm{tg}\, x^2 - 4\,\mathrm{tg}\, x = 4.$ **8.** $18\,\mathrm{ctg}\, x^2 - 3\,\mathrm{ctg}\, x = 10.$
9. $3\sin x^2 - 6\sin x = 2.$ **10.** $3\,\mathrm{tg}\, x^2 - 2\,\mathrm{tg}\, x = 4.$

---

11. $4\sin x^2 = 1 - 2\cos x.$ **12.** $5\frac{\cos 2x}{\cos x^2} + 4\,\mathrm{tg}\, x = 0.$
13. $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}.$ **14.** $2\cos x^2 + 4\cos x = 3\sin x^2.$
15. $\sin x^2 - 2\cos x^2 = 4\sin x.$
16. $7\sin x^2 - 8\sin x \cdot \cos x = 15\cos x^2.$
17. $2\cos x^2 + \sin x^2 = 3\sin x \cdot \cos x.$
18. $\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x = 3.$
19. $3\,\mathrm{tg}\, x - 5\,\mathrm{ctg}\, x = 4.$
20. $\frac{\cos x - \sqrt{5}}{2\cos x} = \frac{\cos x - 10}{2(\cos x + \sqrt{5})}.$

---

21. $4\sin x^2 + 3\cos x^2 = 6{,}5\sin 2x.$
22. $3\sin x^2 + \sin 2x = \cos x^2.$
23. $4\cos x^2 - \sin x^2 = \frac{3}{2}\sin 2x.$
24. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$ **25.** $\sin x + \frac{1}{\cos x} = 2\cos x.$
26. $2\sin x^2 - \cos x^2 = 1.$ **27.** $\frac{\sin x^2}{2} - \frac{\cos x^2}{3} = \frac{1}{4}.$
28. $\sin x^2 + \frac{1}{5} = \sin x \cdot \cos x.$ **29.** $\frac{13}{3}\sin 2x = \cos x^2 + 3.$
30. $2\sin x^2 - \cos x^2 = 1 - \sin 2x.$

---

*) Die quadratischen Gleichungen lassen sich zum Theil bei der Lösung umgehen.

31. $a\sin x^2 + b\cos x^2 = \alpha.$ **32.** $a\sin x^2 + b\sin 2x = \alpha.$
33. $a\cos x^2 + b\sin 2x = \alpha.$ **34.** $a\sin x^2 + b\cos 2x = \alpha.$
35. $a\cos x^2 + b\cos 2x = \alpha.$
36. $3\sin x^2 - 4\sin x \cdot \cos x + 2\cos x^2 = 3/2.$
37. $2\cos x^2 - 3\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x - \sin x^2.$
38. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2.$ **38a.** $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = \alpha.$
39. $\frac{a}{\sin x^2} + \frac{b}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{a}{\cos x^2} = c.$
40. $\frac{1}{\sin x^2} + \frac{6}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos x^2} = 4.$
41. $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) = 0.$
42. $2\sin 2x + 3(\sin x + \cos x) = 0.$
43. $\sin 2x \pm \alpha(\sin x + \cos x) = 0.$
44. $6(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0.$
45. $6\sin 2x = 5(\sin x - \cos x).$
46. $6\sin 2x = 5(\cos x - \sin x).$
47. $\sin 2x \pm \frac{4}{9}(\sin x - \cos x) = 1.$
48. $\sin 2x \pm 4(\sin x + \cos x) = \frac{4}{9}.$
49. $a\sin 2x + b(\sin x + \cos x) = b.$
50. $a\sin 2x + b(\sin x + \cos x) = c.$
51. $6\sin 2x + 5 = 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$
52. $6\sin 2x - 5 = 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$
53. $a\sin 2x - 2b = c(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$
54. $2\operatorname{tg} x + 4 = 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x).$
55. $2\operatorname{tg} x - 4 = 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x).$
56. $6\operatorname{tg} 2x + 5 = 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x).$
57. $a\operatorname{tg} 2x + 2b = c(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x).$
58. $2\sin x + \operatorname{tg} x = 2\sin 2x.$
59. $32\sin x + 3\operatorname{tg} x = 24\sin 2x.$
60. $4a\sin x + 2b\operatorname{tg} x = \sin 2x.$
61. $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1.$ **62.** $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1.$
63. $\cos x + \cos\frac{x}{2} = 1.$ **64.** $\sin\frac{x}{2} - \cos x = 1.$

65. $\cos 2x - \sin x = \frac{1}{2}$. **66.** $\cos 2x + \cos x = \frac{7}{8}$.

67. $\sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}$. **68.** $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}$.

69. $4\sin x - 2\operatorname{ctg} x = \frac{3}{\sin x}$. **70.** $\cos x + 3\operatorname{tg} x = \frac{2}{\cos x}$.

71. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \alpha \cdot \sin 2x$. **72.** $4(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = \frac{15}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$.

73. $a + b\sin 2x = \alpha(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

74. $\frac{a + b\sin 2x}{\cos 2x} = \alpha(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)$.

75. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2\cos 2x}$. **76.** $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = \frac{5}{2}\operatorname{ctg} x$.

77. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = \alpha \cdot \operatorname{ctg} x$. **78.** $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \alpha \cdot \operatorname{ctg} x$.

79. $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \alpha(\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x)$.

80. $\operatorname{ctg} x \,.\, \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 2$.

§ 10. Gleichungen verschiedener Gattungen.

a. Die Form: $a\sin x + b\cos x = c$.

1. $3\sin x + \cos x = 1$. **2.** $\sin x - 3\cos x = 3$.

3. $a\sin x + b\cos x = b$. **4.** $a\sin x + b\cos x = a$.

5. $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$. **6.** $2\sin x - \cos x = 0{,}4$.

7. $8\sin x - \cos x = 4$. **8.** $3\sin x - 4\cos x = 1$.

9. $3\sin x - 4\cos x = \frac{5}{6}$. **10.** $9\sin x + 10\cos x = 11$.

11. $\sqrt{3}\,\sin x - \cos x = \frac{\pi}{4}$. **12.** $\sqrt{2} \cdot \sin x - \sqrt[3]{3} \cdot \cos x = \frac{1}{\pi}$.

13. $a\sin x + b\cos x = \alpha$. **14.** $a\sin x + \alpha\cos x = b$.

Zu Aufg. 13 und 14. Welches ist der grösste Werth von α, wenn a und b geg. sind?

b. Die Form: $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(x + a) \pm \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(x + \beta) = \delta$.

15. $\sin x - \sin(x - \alpha) = \sin\frac{\alpha}{2}$.

16. $\sin(x + \alpha) + \sin x = \cos\beta$; $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 24^\circ$.

17. $\cos(x + \alpha) + \cos(\beta - x) = \sin(\alpha + \beta)$.

18. $\cos\alpha + \cos x = \cos(x - \alpha)$; $\alpha = 50^\circ$.

19. $\sin(x + \alpha) - \cos x = 0{,}5$; $\alpha = 40^\circ$.

20. $\sin(2x+\alpha)-\cos(2x-\beta)=\operatorname{tg}\gamma$; $\alpha=30°$, $\beta=40°$, $\gamma=50°$.
21. $\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)=\cos(\beta+x)+\cos(\beta-x)$.
22. $\sin(\alpha+x)+\sin x=\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{3\alpha}{2}\right)$.
23. $\cos x+\sin x=\operatorname{tg}\alpha(\cos x-\sin x)$.
24. $\cos x-\sin x=\operatorname{tg}\alpha(\cos x+\sin x)$.
25. $a\sin x+b\cos x=a\sin 2x-b\cos 2x$.
26. $a\sin x-b\cos x=a\sin 2x-b\cos 2x$.

c. Die Form: $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(x+\alpha)\cdot\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(x+\beta)=\delta$.

27. $\sin x\cdot\sin(x-\alpha)=\cos\frac{\alpha^2}{2}$.
28. $\sin(x+\alpha)\cdot\cos x=\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)^2$.
29. $\cos(x+\alpha)\cdot\cos(x-\beta)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}^2$.
30. $\sin(x+\alpha)\cdot\cos(x+\beta)=0{,}25$.
31. $\cos(x+\alpha)\cdot\sin(\beta-x)=0{,}1$; $\alpha=78°$, $\beta=87°$.
32. $\cos x\cdot\cos(\alpha-x)=\sin\beta$; $\alpha=67°$, $\beta=4°$.
33. $\sin(x-\alpha)\cdot\cos(x+\beta)=\operatorname{tg}\gamma$; $\alpha=12°$, $\beta=11°$, $\gamma=10°$.
34. $\sin(\alpha+x)\cdot\sin x=-\sin\beta$; $\alpha=56°$, $\beta=4°$.
35. $\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\beta)=\sin(2\alpha+\beta+x)\cdot\cos(\alpha+2\beta-x)$; $\alpha=25°$, $\beta=20°$.
36. $\sin x\cdot\cos(x-\alpha)=\sin(45°+x-\alpha)\cdot\sin(45°-x)$; $\alpha=30°$.

d. Die Form: $\sin x^n\pm\cos x^n=\alpha$.

37. $\sin x^4+\cos x^4=\frac{3}{4}$. 38. $\sin x^4+\cos x^4=\frac{7}{8}$.
39. $\sin x^4+\cos x^4=\frac{2}{3}$. 40. $\sin x^4+\cos x^4=\alpha$ (Determination).
41. $\sin x^6+\cos x^6=\frac{1}{4}$. 42. $\sin x^6+\cos x^6=\frac{1}{2}$.
43. $\sin x^6+\cos x^6=\frac{7}{16}$. 44. $\sin x^6+\cos x^6=\alpha$ (Determination).
45. $\sin x^8+\cos x^8=\frac{1}{4}$. 46. $\sin x^8+\cos x^8=\frac{1}{3}$.
47. $\sin x^8+\cos x^8=\frac{17}{32}$. 48. $\sin x^8+\cos x^8=\alpha$ (Determination).
49. $\sin x^{10}+\cos x^{10}=\frac{1}{8}$. 50. $\sin x^{10}+\cos x^{10}=\frac{17}{32}$.

51. $\sin x^{10} + \cos x^{10} = \frac{1}{2}$. **52.** $\sin x^{10} + \cos x^{10} = \alpha$ (Determ.).
53. $\sin x + \cos x = 1{,}1$. **54.** $\sin x + \cos x = \alpha$ (Determ).
55. $\sin x - \cos x = 0{,}6$. **55a.** $\cos x - \sin x = 0{,}6$.
56. $\sin x^4 - \cos x^4 = \frac{3}{4}$.

e. Erweiterung der Form d.

57. $\sin x^4 + \cos x^4 = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

58. $\sin x^4 + \cos x^4 = \sin 2x - \frac{1}{4}$.

59. $\sin x^6 + \cos x^6 = 3{,}25\,(1 - \sin 2x)^2$.

60. $\sin x^8 + \cos x^8 = \sin x^6 + \cos x^6 - \alpha \sin 2x^2; \quad \alpha = \frac{5}{32}$.

61. $\sin x^{10} + \cos x^{10} = 2 \sin 2x^2 - 1$.

62. $\sin x^{10} + \cos x^{10} = \alpha(\sin x^4 + \cos x^4); \quad \alpha = \frac{9}{16}$.

63. $\sin x^{10} + \cos x^{10} + \sin x^8 + \cos x^8 + \sin x^6 + \cos x^6 +$
$+ \sin x^4 + \cos x^4 = \alpha; \quad \alpha = 1$.

64. $\sin x^8 + \cos x^8 = \alpha(\sin x^6 + \cos x^6); \quad \alpha = \frac{3}{4}$.

65. $(\sin x^6 + \cos x^6)\cdot(\sin x^4 + \cos x^4) = \alpha(\sin x^8 + \cos x^8); \alpha = 0{,}9$.

---

66. $\sin x^3 + \cos x^3 = \frac{3}{4}(\sin x + \cos x)$.

67. $\sin x^3 + \cos x^3 = \frac{\cos 2x}{\sin \alpha}$.

68. $\sin x^3 - \cos x^3 = \alpha \cdot (\sin x - \cos x); \quad \alpha = \frac{3}{4}$.

69. $\sin x^5 + \cos x^5 = \frac{2}{3}(\sin x + \cos x)$.

70. $\sin x^5 + \cos x^5 = \frac{1}{2}(\sin x^3 + \cos x^3)$.

71. $\sin x^5 + \cos x^5 + \sin x^3 + \cos x^3 = \sin x + \cos x$.

72. $\sin x^5 + \cos x^3 - \alpha \sin x = \cos x^5 + \cos x^3 - \alpha \cos x; \quad \alpha = 1{,}75$.

73. $\sin x^4 - \cos x^4 = \sin 2x$.

74. $\sin x^6 - \cos x^6 = \alpha \cos 2x; \quad \alpha = -\frac{7}{8}$.

75. $\cos x^8 - \sin x^8 = \alpha \sin 4x; \quad \alpha = 1$.

---

f. Vermischte Aufgaben.

76. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + x) = \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\gamma - x)$.
77. $\cos(\alpha - x) \cdot \cos(\beta + \gamma) = \cos(\alpha + x) \cdot \cos(\beta - \gamma)$.
78. $\operatorname{tg} x^2 = \sin \alpha^2 + \cos \beta^2$; $\alpha = 54^\circ\, 18{,}5'$, $\beta = 18^\circ\, 54{,}5'$.
79. $\operatorname{ctg} x^2 = \sin \alpha^2 + \cos \beta^2$; $\alpha = 34^\circ\, 56{,}7'$; $\beta = 76^\circ\, 54{,}3'$.
80. $\sin \alpha - \sin(x + \alpha) + \sin(2x + \alpha) = 0$.
81. $\cos(\alpha + x) + \cos \alpha + \cos(\alpha - x) = 0$.
82. $\sin(\alpha + 2x) + \sin(\alpha + x) + \sin \alpha + \sin(\alpha - x) + \sin(\alpha - 2x) = 0$.
83. $\cos(\alpha + 2x) + \cos \alpha + \cos(\alpha - 2x) = \cos(\alpha + x) + \cos(\alpha - x)$.
84. $\sin(\alpha + x) \cdot \sin(\alpha - x) + \frac{3}{4} = \sin \alpha [\sin(\alpha + x) + \sin(\alpha - x)]$.
85. $\cos(\alpha - x) \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \cos(\alpha + x) + \cos(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha - x) = -\frac{3}{4}$.
86. $2 \sin \frac{x}{2} = 1 + 2 \cos\left(45^\circ + \frac{x}{4}\right)$.
87. $\sin x (2 \cos 2x + 1) - \cos 3x = \frac{1}{2}$.
88. $\cos 3x + \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin x \cdot \sin 2x$.
89. $\cos x + \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{12}{13} \sin 2x \cdot \sin 3x$.
90. $\cos 3x = 3 \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x \cdot \cos \alpha$.

§ 11. Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten.

1. $x + y = 17^\circ\, 18'$; $\sin x : \sin y = 5 : 4$.
2. $x - y = 1^\circ\, 12{,}5'$; $\sin x : \sin y = 5 : 4$.
3. $\cos(x + y) = 0$; $\sin x : \sin y = 2 : 3$.
4. $y - x = 7^\circ\, 19'$; $\cos x : \cos y = 3 : 2$.
5. $x - y = 30^\circ$; $\cos x : \cos y = \operatorname{tg} \beta$; $\beta = 36^\circ\, 18'$.
6. $x + y = 80^\circ$; $\cos x : \cos y = 5 : 12$.
7. $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$; $\sin x : \cos y = 1 : 2$.
8. $\operatorname{tg}(x + y) = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = 3 : 4$.
9. $\sin(x - y) = 0{,}3$; $\operatorname{ctg} x : \operatorname{ctg} y = 1 : 3$.
10. $\operatorname{tg}(x + y) = 0{,}534$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{ctg} y = 1 : 20$.

10a. $\operatorname{ctg}(x - y) = 2$; $\operatorname{tg} y : \operatorname{ctg} x = 3$.

11. $x + y = 70°$; $\sin x + \sin y = 1$.
12. $x + y = 100°$; $\sin x - \sin y = 0,2$.
13. $x - y = 7° 19'$; $\cos x + \cos y = 1,1$.
14. $x + y = 100°$; $\cos x - \cos y = 0,25$.
15. $x + y = 180°$; $\sin x \cdot \cos y = 0,25$.
16. $x - y = 6°$; $\sin x \cdot \sin y = 0,25$.
17. $x - y = 10°$; $\cos x \cdot \cos y = 0,2$.
18. $x + y = 100°$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2,5$.
19. $x - y = 30°$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$.
20. $x - y = 10°$; $\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x = 1$.
20a. $x + y = 60°$; $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} 10°$.

---

21. $x + y = 70°$; $\sin x^2 + \sin y^2 = 0,5$.
22. $x - y = 10°$; $\cos x^2 + \cos y^2 = 1,25$.
23. $x - y = 100°$; $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y} = 1,5$.
24. $x - y = 7°$; $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos y} = 2\frac{1}{3}$.
24a. $x - y = \alpha$; $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos y} = \operatorname{tg} \beta$.
25. $4x + y = 540°$; $\sin x : \cos \frac{y}{2} = \sqrt{2} : 1$.
26. $\cos 2x + \cos 2y = 0,25$; $\sin x : \sin y = 2 : 3$.
27. $\sin (x + y) \cdot \cos (x - y) = 0,125$; $\sin x : \sin y = 2 : 3$.
28. $\cos (x + y) \cdot \cos (x - y) = 0,125$; $\sin x : \sin y = 2 : 3$.
29. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{8}{7}$; $\cos x : \cos y = 3 : 4$.
30. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2$; $\sin x \cdot \cos y = 0,25$.

---

31. $\sin x + \sin y = \frac{5}{4}$; $\cos x + \cos y = -\frac{2}{3}$.
31a. $\sin x + \sin y = \frac{2}{3}$; $\cos x + \cos y = \frac{3}{4}$.
32. $\sin x - \sin y = -\frac{1}{2}$; $(\frac{1}{8})$; $\cos x + \cos y = \frac{2}{3}$; $(-\frac{1}{9})$.
32a. $\sin x - \sin y = \alpha$; $\cos x + \cos y = \beta$.
33. $\sin x + \sin y = \frac{5}{4}$; $(\frac{3}{4})$; $\cos x - \cos y = 0,2$; $(\frac{2}{3})$.
34. $\sin x - \sin y = 0,2$; $\cos x - \cos y = -0,25$.
34a. $\sin x - \sin y = \alpha$; $\cos y - \cos x = \beta$.

35. $\sin x + \cos y = \frac{2}{3}$; $\cos x + \sin y = \frac{3}{4}$.
36. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{5}{4}$; $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{1}{3}$.
37. $\sin(x+y) = \alpha \sin x$; $\cos(x+y) = \beta \cos x$.
38. $\sin(x+y) = \alpha \cos x$; $\cos(x+y) = \beta \sin x$.

---

39. $\sin x : \sin y = \alpha : \beta$; $\cos x : \cos y = \gamma : \delta$.
39a. $\sin x : \cos y = \alpha : \beta$; $\cos x : \sin y = \gamma : \delta$.
40. $\sin x : \sin y = \alpha : \beta$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = \gamma : \delta$.
40a. $\cos x : \cos y = \alpha : \beta$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = \gamma : \delta$.
40b. $\sin x : \cos y = \alpha : \beta$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{ctg} y = \gamma : \delta$.
41. $a(\sin x - \sin y) = b(\sin 2x - \sin 2y)$;
$a(\cos x - \cos y) = b(\cos 2x - \cos 2y)$; $a = 3$, $b = 4$.
42. $\sin 2x + \sin 2y = \alpha(\sin x + \sin y)$;
$\cos 2x + \cos 2y = \beta(\cos x + \cos y)$; $\alpha = 3$, $\beta = 1$.
43. $\cos x = \cos\alpha \cdot \cos x + \sin\alpha \cdot \sin x \cdot \cos y$; $\sin x \cdot \sin y = \sin\beta$.
44. $\cos(x+y) = \delta$; $\sin x : \sin y = a : b$. (Vergl. Aufg. 1—10)
45. $\cos(x+y) = \delta$; $\cos x : \cos y = a : b$.
46. $\sin(x+y) = \delta$; $\sin x : \cos y = a$ i b.
47. $\sin(x+y) = \delta$; $\sin x : \sin y = a : b$.
48. $\operatorname{tg}(x+y) = \delta$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = a : b$.
49. $\operatorname{ctg}(x+y) = \delta$; $\operatorname{ctg} x : \operatorname{ctg} y = a : b$.
50. $\operatorname{tg}(x+y) = \delta$; $\sin x : \sin y = 1 : \alpha$; $\delta = -\sqrt{\alpha^2 - 1}$.
50a. $\operatorname{tg}(x+y) = \delta$; $\sin x : \sin y = 1 : \alpha$; $\delta = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}$.

---

51. $x + y + z = \varDelta$, $(= 180^\circ)$; $\sin x : \sin y : \sin z = a : b : c$.
52. $x + y + z = \varDelta$, $(= 90^\circ)$; $\cos x : \cos y : \cos z = a : b : c$.
53. $x + y + z = \varDelta$, $(= 180^\circ)$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c$.
54. $x + y + z = \varDelta$, $(= 90^\circ)$; $\operatorname{ctg} x : \operatorname{ctg} y : \operatorname{ctg} z = a : b : c$.
55. $x + y - z = \varDelta$, $(= 0^\circ)$; $\sin x : \sin y : \sin z = a : b : c$.
56. $x + y - z = 180^\circ$; $\sin x : \sin y : \sin z = a : b : c$.
57. $x + y - z = \varDelta$, $(= 90^\circ)$; $\cos x : \cos y : \cos z = a : b : c$.
58. $x + y - z = \varDelta$, $(= 0^\circ)$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c$.
59. $x + y - z = 90^\circ$; $\operatorname{ctg} x : \operatorname{ctg} y : \operatorname{ctg} z = a : b : c$.
60. $x + y - 2z = 0$; $\sin x : \sin y : \sin z = a : b : c$.

---

61. $x \cdot \cos u = a$; $x \cdot \sin u = b$.
62. $x \cdot \sin u = a$; $x \cdot \operatorname{tg} u = b$.

63. $x \cdot \sin(\alpha + u) = a; \quad x \cdot \sin(\beta + u) = b.$ (Vergl. § 22, Aufg. 57.)

64. $x \cdot \cos(\alpha + u) = a; \quad x \cdot \cos(\beta + u) = b.$

65. $x \cdot \sin(\alpha + u) = a; \quad x \cdot \cos(\beta + u) = b.$ (Vergl. § 22, Aufg. 56.)

66. $x \cdot \operatorname{tg}(\alpha + u) = a; \quad x \cdot \operatorname{tg}(\beta + u) = b.$ (Vergl. § 22, Aufg. 58.)

67. $x \cdot \sin(\alpha + u) = a; \quad x = b \cdot \cos(\beta + u).$

68. $x(\sin u + \sin v) = a; \; x(\cos u + \cos v) = b; \; x(\sin 2u + \sin 2v) = c.$

69. $x \cos u - y \sin u = a; \quad x \sin u + y \cos u = b;$

$x^2 - 2ax \cdot \cos u = c^2 - a^2.$

69a. $x \cos u - y \sin u = a,$

$x \sin u + y \cos u = b,$

$x^2 - 2bx \sin u + b^2 = d^2.$

70. $x \sin u - y \cos u = a,$

$x \cos u + y \sin u = b,$

$y = x \operatorname{tg}(\alpha - u).$

D. Algebraische Gleichungen.

§ 12. Gleichungen der zweiten Grades mit einer Unbekannten.

a. Zu den trigonometrischen Entwickelungen.

1. $x^2 + 1 = \frac{2x}{\sin\alpha}.$ **2.** $x^2 + 1 = \frac{2x}{\cos\alpha}.$

3. $1 - x^2 = 2x \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$ **4.** $x^2 - 1 = 2x \cdot \operatorname{tg}\alpha.$

5. $2\sqrt{1 - x^2} = \frac{\sin\alpha}{x}.$ **6.** $2\sqrt{1 - x^2} = \frac{\cos\alpha}{x}.$

7. $\sqrt{x^2 - 2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{x}.$ **8.** $\sqrt{x^2 - 2} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{x}.$

9. $x^2 + 1 = \frac{4x \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}.$

9a. $x^2 - 1 = \frac{4x \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}.$

10. $x^2 \cdot \cos\alpha + 2x \cdot \cos\alpha^2 + \cos 3\alpha = 0.$

10a. $x^2 \cdot \sin\alpha - 2x \cdot \sin\alpha^2 - \sin 3\alpha = 0.$

b. Anwendung der Trigonometrie auf die Umformung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung.

α. Die Form $ax^2 + bx + c = 0$, wo $b^2 > 4\,ac$.

11. $x^2 + 0{,}6789 \cdot x + 0{,}08945 = 0$.

11a. $x^2 - 6{,}5432 \cdot x + 2{,}3456 = 0$.

12. $0{,}14325 \cdot x^2 + 1{,}2345 \cdot x + 2{,}646 = 0$.

13. $x^2 \sqrt{0{,}2} + x \sqrt[3]{3} + 1 = 0$.

14. $x^2 - 3x \sqrt[3]{3} + 2 \sqrt[3]{9} = 0$.

15. $x^2 + x \sqrt{3} + 0{,}44949 = 0$.

16 $\pi x + \frac{1}{\pi x} = 5{,}6251$.

17. $x^2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - x \sin\beta + 0{,}1 \cos\gamma = 0$,
wenn $\alpha = 67^\circ$, $\beta = 76^\circ$; $\gamma = 42^\circ\, 43'$.

18. $x^2 + x \cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$; die Werthe von x zu bestimmen für $\alpha = 42^\circ$ und eine Grenze für α anzugeben.

19. $2x^2 \cdot \sin 3\alpha + 2x \cdot \sin 2\alpha + \sin\alpha = 0$; die Werthe von x zu bestimmen für $\alpha = 48^\circ$ und eine Grenze für α anzugeben.

20. $x^2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{2x}{\cos\alpha} + \mathrm{ctg}\,\alpha = 0$.

β. Die Form $ax^2 + bx = c$, $c > 0$.

21. $x^2 + 0{,}1234 \cdot x = 9{,}3702$.

22. $x^2 - 2{,}4768 \cdot x = 3{,}0165$.

23. $x^2 \sqrt{3} - x \sqrt{2} = 5{,}498$.

24. $x^2 - x \sqrt[3]{2} = \sqrt{3}$.

25. $\pi x^2 + x \sqrt{2} = \sqrt[3]{5872}$.

26. $\pi x^2 - e \cdot x = \sqrt[3]{2}$; $e = 2{,}7183$.

27. $\pi x^2 - x \cdot \log 2 = \sin 40^\circ$.

28. $x^2 \cdot \sin\alpha + 2x \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$; $\alpha = 50^\circ$. (Vergl. Aufg. 3).

29. $x^2 \cdot \cos\alpha + x \sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$; $\alpha = 50^\circ$.

30. $x^2 \cdot \cos\alpha^2 - x \cdot \sin 2\alpha = \sin\alpha^2$.

γ.*) Die Wurzeln der Gleichung
$ax^2 + bx + c = 0$
als die Tangenten zweier Winkel u und v darzustellen.

31. $x^2 - 0{,}87705 \cdot x + 0{,}13541 = 0$.

32. $4x^2 + 4{,}1 \cdot x = 4{,}899$.

*) Die Gleichungen mit imaginären Wurzeln siehe § 14.

33. $0,2468 \cdot x^2 + 2,468 \cdot x = 8,642.$

34. $2,5981 \cdot x^2 - 0,61455 \cdot x = 5,1235.$

35. $x^2 \cdot \sin\alpha + x \cdot \sin(\alpha + \beta) + \sin\beta = 0;\ \alpha = 45^\circ,\ \beta = 15^\circ.$

36. $x^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha - x \cdot \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{ctg}\beta;\ \alpha = 43^\circ,\ \beta = 34^\circ.$

§ 13. Quadratische Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten.

1. Man kennt von zwei Zahlen die Summe gleich 3,3985 und das Produkt = 2,7709: die Zahlen zu bestimmen.

2. $x - y = 0,289;$ $xy = 11,9583.$

3. $x + y = \frac{2}{\cos\alpha^2};$ $xy = \operatorname{tg}\alpha^2.$

4. $x - y = \sin 2\alpha;$ $xy = \operatorname{ctg}\alpha^2.$

5. $x\sqrt{2} + y\sqrt[3]{3} = \pi.$ $x^2 + y^2 = 4.$

6. $x^2 + y^2 = a = 3,6675;$ $xy = b = 1,8171.$

7. $x^2 + y^2 = 7,6543;$ $x + y = 3,4567.$

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$ $\alpha x + \beta y = \gamma.$

8a. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1;$ $5x + 6y = 7.$

9. $x^2 - y^2 = a - \alpha xy;$
$x^2 + y^2 = b^2;\ a = 213,\ b = 87,\ \alpha = 5.$

10. $ax^2 - by^2 = \alpha x^2 + \beta y^2;$
$2xy = c^2 + x^2 - y^2.$

11. $x + y = \alpha(1 - xy);$
$x - y = \beta \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2};\ (\beta < 1:)$

12. Man kennt von zwei Winkeln die Summe gleich α und die Summe der reciproken Werthe der Sinus $= \beta$; $\alpha = 120^\circ$; $\beta = 3$.

13. Man kennt von zwei Winkeln die Differenz gleich $6^\circ\ 52,2'$ und die Summe der reciproken Werthe der Sinus gleich $2\frac{2}{3}$.

14. $x - y = \alpha(1 + xy);$
$\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2} = \beta;\ \alpha = \sqrt{3},\ \beta = 2.$

15. $x\sqrt{b^2 - y^2} + y\sqrt{a^2 - x^2} = c^2;$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \gamma.$

16. $x\sqrt{b^2 - y^2} + y\sqrt{a^2 - x^2} = c^2;$
$b\sqrt{a^2 - x^2} + a\sqrt{b^2 - y^2} = d^2.$

17. $x^2 + y^2 = a^2$,
$u^2 + v^2 = b^2$,
$xv - yu = c^2$,
$xu - yv = d^2$.

18. $x^2 + y^2 = 5$,
$u^2 + v^2 = 7$,
$xv + yu = 3\sqrt{3}$,
$xu + yv = 4\sqrt{2}$.

§ 14. Complexe Ausdrücke in trigonometrischer Form. Trigonometrische Reihen.

(Vergl. Algebraische Aufgaben §§ 40, 41.)

1. (Der Moivre'sche Satz.) In complexer Form darzustellen das Resultat der Entwickelung von:
a. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)$.
b. $(\cos\alpha + i\sin\alpha) : (\cos\beta + i\sin\beta)$.
c. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$. **d.** $\sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha}$.

2. Als complexe Ausdrücke in trigonometrischer Form darzustellen:
a. $a + bi$. **b.** $1 + i$. **c.** $-1 + i$. **d.** 1. **e.** -1. **f.** i. **g.** $-i$.

3. Lösung der (reinen) quadratischen Gleichung:
a. $x^2 = 3 - 4i$. **b.** $x^2 = -1 - i$.
c. $x^2 - 2ax + a^2 + 1 = 0$. **d.** $x^2 + 2(i+1)x + 2i = 4$.
e. $x^2 - y^2 = 4i$; $x^4 + y^4 = -8$. **f.** $x^2 + y^2 = 6$; $x^4 + y^4 = -14$.

4. Lösung der (gemischten) quadratischen Gleichung:
$ax^2 + bx + c = 0$, wenn $c > 0$ und $4ac > b^2$.

5. (Anschl.) Die Wurzeln zu bestimmen der Gleichung:
a. $1234x^2 + 2345x + 3456 = 0$.
b. $\sqrt{7}\cdot x^2 - \sqrt{5}\cdot x + \sqrt{3} = 0$.

6. Gegeben die quadratische Gleichung:
$$2x^2 - 3x + 4 = 0:$$
diejenige quadratische Gleichung darzustellen, deren Wurzeln die Quadrate (bezüglich die Cuben) der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

7. (Anschl.) Die Wurzeln der gesuchten Gleichung sollen die fünften (bezüglich die siebenten) Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sein.

8. Gegeben die Gleichung:

$$x^2 - ax + b = 0:$$

diejenige quadratische Gleichung darzustellen, deren Wurzeln die vierten Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

9. Zwei Zahlen zu bestimmen, von welchen die Summe der Quadrate gleich a^2 und die Summe selbst gleich b gegeben ist, ($b < 2a$). (Vergl. § 13, Aufg. 7).

10. Bestimmung der drei Wurzeln der Gleichung:

a. $x^3 = 1.$ **b.** $x^3 = -1.$

c. $x^3 = i.$ **d.** $x^3 = 2 + 2i.$

11. Darzustellen die Wurzeln der Gleichung:

a. $x^4 + 1 = 0.$ **b.** $x^4 = i.$ **c.** $x^4 = 7 + 24i.$

12. Zu lösen die Gleichung:

a. $x^4 - x^2 + 1 = 0.$ **b.** $x^4 + x^2\sqrt{3} + 1 = 0.$

13. (Anschl.) Als Produkt zweier reellen Faktoren des zweiten Grades darzustellen:

a. $x^4 - x^2 + 1.$ **b.** $x^4 + x^2\sqrt{3} + 1.$

Anwendung der Trigonometrie auf die reciproken Gleichungen des vierten Grades.

14. Zu lösen die Gleichung:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

15. $x^4 - x^3 \cdot \sin 20^\circ - x^2 \cdot \operatorname{tg} 73^\circ - x \sin 20^\circ + 1 = 0.$

16. $(x^4 + 1) \sin\alpha - (x^3 + x) \cos\beta = x^2;$ $\alpha = 24^\circ,$ $\beta = 36^\circ.$

17. $x^4 + 1 - (x^3 + x) \cdot \sin\alpha + x^2 \cdot \operatorname{tg}\beta = 0;$ $\alpha = 70^\circ,$ $\beta = 62^\circ.$

Trigonometrische Reihen.

18. Cos $n\alpha$ und sin $n\alpha$ nach Potenzen von cos α und sin α zu entwickeln.

19. (Anschl.) Entwickelung von cos 2α, cos 3α, cos 4α, cos 5α und von sin 2α, sin 3α, sin 4α, sin 5α nach Potenzen von cos α und sin α.

20. Die $2n$te und $(2n + 1)$te Potenz von cos α und sin α nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von α zu entwickeln.

21. (Anschl.) Entwickelung von cos α^2, cos α^3, cos α^4, cos α^5 und von sin α^2, sin α^3, sin α^4, sin α^5 nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von α.

22. Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$, wo x den zum Radius 1 gehörigen Bogen (arcus) bedeutet, nach Potenzen von x zu entwickeln.

23. (Anschl.) Die Werthe der Cosinus und Sinus zu berechnen, welche gehören zu den Winkeln:

a. 1°. **b.** 12°. **c.** 17°. **d.** $\delta = 23^\circ\, 45{,}6'$.

24. Die Funktion e^{xi}, wo e die Basis ist des natürlichen Logarithmensystems, durch $\cos x$ und $\sin x$ in complexer Form darzustellen.

25. (Anschl.) $\operatorname{Cos} x$ und $\sin x$ durch e^{xi} und e^{-xi} auszudrücken.

26. Einen gegebenen Bogen (arcus) x in eine Reihe nach Potenzen seiner Tangenten zu entwickeln, wenn $tg x \leqq 1$ ist.

27. (Anschl.) Die Zahl π durch eine unendliche Reihe darzustellen und auf acht Decimalstellen zu berechnen.

§ 15. Cubische Gleichungen.

1. Die Werthe der Unbekannten aus den Gleichungen

$$x^3 + y^3 = 2b^3,\quad xy = -a^2$$

trigonometrisch darzustellen.

2. Trigonometrische Bestimmung zweier Zahlen, deren Produkt gleich a^2 und von denen die Summe der Cuben gleich $2b^3$ gegeben ist. $(b > a)$.

3. (Anschl.) Es sei $b < a$ vorausgesetzt und die Aufgabe, die Summe der beiden gesuchten Zahlen zu bestimmen.

4. (Anschl. an 1—3). Die Gleichung

$$(1).\qquad u^3 - 3xy \cdot u - (x^3 + y^3) = 0$$

zu identificiren mit der Gleichung

$$(2).\qquad u^3 + au + b = 0,$$

d. h. x und y so zu bestimmen, dass die Gleichung (1) in die Form der Gleichung (2) übergeht, oder weil Gleichung (1) identisch erfüllt wird durch den Werth $u = x + y$, die Gleichung (2) zu lösen.

5. Zu lösen die cubische Gleichung:

a. $x^3 - 22x = 84$. **b.** $x^3 + 3x - 5{,}25 = 0$.
c. $x^3 + x + 10 = 0$. **d.** $2x^3 - 9{,}3x = 8$.
e. $9x^3 + 26x + 9 = 0$.

6. Zu lösen die Gleichung:

a. $x^3 - 7x = 6$. b. $9x^3 - 28x + 16 = 0$.

c. $x^3 - 3x = 2$. d. $x^3 - 3x = 2\cos\alpha$.

e. $9x^3 - 46{,}84x = 12$. f. $x^3 - 2{,}06x + 0{,}8 = 0$.

7. Zu lösen die Gleichung:

a. $x^3 - 3x^2 - 22x + 90 = 0$. b. $x^3 - x^2 - 2x = 12$.

c. $2x^3 - 5x^2 + 18 = 0$. d. $x^3 + 3x^2 - 16x = 40$.

e. $9x^3 - 6{,}75x^2 - 16x + 12 = 0$. f. $3x^3 - 24{,}1x^2 + 90 = 0$.

8. Den Winkel x zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\sin 3x - \sin x = \tfrac{1}{2}.$$

9. $\sin x^3 + \cos x^3 = \cos\alpha$ $(\alpha \leqq 45^\circ)$ Besondere Fälle: $\alpha = 45^\circ$; $\alpha = 30^\circ$.

10. $\sin x^3 - \cos x^3 = \sin\alpha$.

10a. $\sin x^3 - \cos x^3 = -\sin\alpha$

(10 und 10a:) $\alpha = 45^\circ$.

11. $\sin x^3 + \cos x^3 + \tfrac{1}{2}\sin 2x = 0$.

11a. $\sin x^3 + \cos x^3 - \tfrac{1}{2}\sin 2x = 0$.

12. $\sin x^3 - \cos x^3 = 0{,}6 \cdot \sin 2x$.

12a. $\sin x^3 - \cos x^3 = -0{,}6 \cdot \sin 2x$.

13. $3\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 6x} = 4\cos\alpha$.

13a. $3\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 6x} = 4\sin\alpha$.

Anwendungen der cubischen Gleichungen auf geometrische Aufgaben finden sich in § 36.

Cap. II.

Trigonometrie.

A. Rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke, regelmässige Vielecke.

§ 16. Fundamentalaufgaben.

a. Rechtwinklige Dreiecke.

Bezeichnet werden durch a und b die Katheten, durch α und β die entsprechenden Gegenwinkel, durch c die Hypotenuse, durch h die zu c gehörige Höhe, durch fl der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks.

Die fehlenden Seiten und die Winkel zu bestimmen, wenn gegeben sind:

1. $a = 5,\quad b = 6.$ **2.** $a = 8,\quad c = 9.$
$a = 8,\quad b = 5.$ $a = 17,\quad c = 29.$
$a = 16,\quad b = 9.$ $b = 69{,}52,\quad c = 83{,}16.$

3. $a = 50,\quad b = 40{,}302.$ **4.** $a = 76{,}543,\quad c = 123{,}45$
$a = 19,\quad b = 18{,}7.$ $a = 34{,}567,\quad c = 76{,}543.$
$a = 12{,}345,\quad b = 13{,}579.$ $b = \sqrt[3]{2},\quad c = \sqrt{3}.$

5. $a = 188{,}82,\quad c = 202{,}44.$
$a = 50{,}937,\quad c = 53{,}116.$
$a = 0{,}615,\quad c = 70.$

Die fehlenden Seiten zu bestimmen, wenn gegeben sind:

6. $a = 7,\quad \alpha = 18^\circ\, 14'.$ **7.** $c = 68,\quad \alpha = 69^\circ\, 54'.$
$b = 12,\quad \alpha = 29^\circ\, 8'.$ $c = 27,\quad \beta = 51^\circ\, 42{,}8.$
$b = 9,\quad \beta = 34^\circ\, 44'.$ $c = 8{,}642,\quad \beta = 86^\circ\, 4{,}2'.$

8. $a = 5{,}0472,\quad \beta = 50^\circ\, 47{,}2'.$ **9.** $a = 47,\quad \beta = 48^\circ\, 49'.$
$c = 27,\quad \beta = 44^\circ\, 4{,}4'.$ $c = 35,\quad \alpha = 36^\circ\, 37{,}5'.$
$c = 18,\quad \alpha = 55^\circ\, 16{,}3'.$ $b = 17{,}342,\quad \alpha = 80^\circ\, 0{,}8'.$

10. $a = 62{,}08, \quad \beta = 81^\circ 30'$.
$b = 5{,}2897, \quad \alpha = 52^\circ 50{,}4'$.
$c = 8{,}651, \quad \alpha = 5^\circ 45{,}9'$.

Die fehlenden Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes zu bestimmen, von welchem gegeben sind:

11. $h = 60, \quad a = 156$.
$h = 10{,}296, \quad b = 11$.
$h = 0{,}1 \quad \alpha = 23^\circ 45{,}6'$.
$h = 9{,}8765, \quad \beta = 43^\circ 2{,}1'$.

12. $\mathcal{J} = 23{,}4, \quad a = 7{,}2$.
$\mathcal{J} = 58, \quad a = 10$.
$\mathcal{J} = 18, \quad a = 5$.
$\mathcal{J} = 20, \quad b = 5{,}5885$.

13. $\mathcal{J} = 28, \quad \alpha = 47^\circ 39'$.
$\mathcal{J} = 100, \quad \alpha = 27^\circ 53'$.
$\mathcal{J} = 12, \quad \alpha = 29^\circ$.
$\mathcal{J} = 87, \quad \beta = 42^\circ 18{,}4'$.

14. $h = 4{,}8, \quad c = 10$.
$h = 6{,}72, \quad c = 25$.
$h = 12{,}34. \quad c = 56{,}78$.

15. $\mathcal{J} = 30, \quad c = 13$.
$\mathcal{J} = 100, \quad c = 22$.
$\mathcal{J} = 25{,}76, \quad c = 12{,}78$.

b. Gleichschenklige Dreiecke.

Bezeichnung: $AB = c$ die Grundlinie, $CB = CA = a$ die gleichen Seiten, γ der Winkel an der Spitze, $\alpha = \beta$ die Basiswinkel, h die Höhe zur Basis.

Die fehlenden Seiten oder Winkel zu bestimmen, wenn gegeben sind:

16. $a = 12, \quad c = 8$.
$a = 5{,}2915, \quad c = 7{,}4688$.

17. $a = 145, \quad \alpha = 6^\circ 44'$.
$a = 100{,}51, \quad \gamma = 100^\circ 51'$.

18. $c = 13{,}827, \quad \alpha = 42^\circ 18{,}4'$.
$c = 32{,}662, \quad \gamma = 106^\circ 16'$.

19. $h = 34{,}726, \quad \gamma = 46^\circ 17'$.
$h = 6{,}58, \quad \alpha = 61^\circ$.

20. $\mathcal{J} = 12{,}88, \quad \alpha = 19^\circ 33{,}5'$.
$\mathcal{J} = 0{,}1, \quad \gamma = 89^\circ 59{,}8'$.

21. $\mathcal{J} = 0{,}38, \quad c = 1{,}0203$.
$\mathcal{J} = 0{,}38, \quad a = 1{,}0203$.

c. Vermischte Beispiele.

Aufg. 22—25. Von einem rechtwinkligen Dreieck gegeben:

22. Die Mittellinie auf die Hypotenuse und eine Kathete: $m = 6{,}25$; $a = 4{,}4$; die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

23. Die Mittellinie und die Höhe auf die Hypotenuse: $m = 6{,}5$; $h = 6{,}3$; die Winkel zu bestimmen.

24. Die Mittellinie auf die Hypotenuse und deren Winkel mit der Hypotenuse: $m = 3$, $\delta = 50^\circ$; den Inhalt zu bestimmen.

25. Die Mittellinie auf eine Kathete und deren Winkel mit dieser Kathete: $m_1 = 65$, $\varepsilon = 67°22{,}8'$; den Inhalt zu bestimmen.

25a. Den Inhalt eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem eine Seite a, die Verbindungslinie der Gegenecke mit einem beliebigen Punkte A_1 von a, $AA_1 = d$, und der Winkel δ dieser Linie mit a gegeben sind.

26. Welche trigonometrische Beziehung findet zwischen den Winkeln ε_1 und ε_2 statt, welche die von den Endpunkten der Hypotenuse zu den Gegenkatheten gezogenen Mittellinien mit diesen bilden?

27. Von einem (beliebigen) Dreieck gegeben eine Seite a und der gegenüberliegende Winkel α: den Radius des umschriebenen Kreises r zu berechnen; $a = 5{,}8158$; $\alpha = 54°32{,}5'$.

28. Von einem Dreieck gegeben der Radius des umschriebenen Kreises r und eine Seite a: den Gegenwinkel α zu bestimmen; $r = 8{,}08$, $a = 14{,}919$.

29. Von einem Punkte P, dessen Entfernung vom Mittelpunkte eines Kreises gleich d gegeben ist, sind Tangenten an den Kreis gelegt: wie gross ist der Winkel derselben und die Entfernung ihrer Berührungspunkte, wenn r der Radius des Kreises ist? ($d = 125$, $r = 44$.)

30. Von einem Dreieck gegeben eine Höhe h und die Winkel an der Grundlinie β und γ: die Grundlinie a und den Inhalt zu bestimmen. ($h = 17{,}25$; $\beta = 44°4{,}4'$; $\gamma = 70°16{,}8'$.) (Vergl. § 18, Aufg. 8).

d. Regelmässige Vielecke.

Bezeichnung: Die Seitenanzahl n, die Seite $AB = 2c$, der Centriwinkel $ACB = 2\gamma$, also $\gamma = \frac{180^0}{n} = \frac{\pi}{n}$, $AC = BC = r$, $CD\ (\perp AB) = \varrho$; der Umfang des Vielecks $= 2s$, der Inhalt $= fl$.

	Gegeben:		Gesucht:
31.	$n = 10$,	$2c = 1$:	r, ϱ, fl.
32.	$n = 8$,	$\varrho = 1$:	r, fl.
33.	$n = 18$,	$r = 1$:	ϱ, $2c$.
34.	$n = 900$,	$r = 1$:	fl, $\varrho^2\pi$.
35.	$n = 12$,	$2s = 70$:	$2\varrho\pi$, $2r\pi$, $\varrho^2\pi$, fl, $r^2\pi$.
36.	$n = 28$,	$2s = 1000$:	$2\varrho\pi$, $2r\pi$.

	Gegeben:		Gesucht:
37.	$n = 11,$	$2s = 88:$	$\varrho^2\pi,\ fl,\ r^2\pi.$
38.	$n = 7,$	$fl = 7:$	$\varrho^2\pi,\ r^2\pi,\ 2\varrho\pi,\ 2s,\ 2r\pi.$
39.	$n = 11,$	$fl = 20:$	$\varrho^2\pi,\ r^2\pi.$
40.	$n = 27,$	$2\varrho\pi = 27:$	$2r\pi,\ 2s.$
41.	$n = 17,$	$2\varrho\pi = 12{,}34:$	$2s,\ 2r\pi,\ \varrho^2\pi,\ fl,\ r^2\pi.$
42.	$n = 40,$	$2r\pi = 70:$	$2s,\ 2\varrho\pi.$
43.	$n = 25,$	$2r\pi = 80:$	$fl,\ \varrho^2\pi.$
44.	$n = 11,$	$\varrho^2\pi = 100:$	$fl,\ r^2\pi,\ 2s,\ 2r\pi.$
45.	$n = 12,$	$\varrho^2\pi = 321:$	$fl,\ r^2\pi.$
46.	$n = 9,$	$r^2\pi = 100:$	$fl,\ \varrho^2\pi.$
47.	$n = 27,$	$r^2\pi = 75{,}23:$	$2s,\ 2\varrho\pi,\ 2r\pi.$

48. Gegeben der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks gleich 20: wie gross ist der Inhalt des inneren Berührungskreises?

49. Der Inhalt eines Kreises ist gleich 10 gegeben: wie gross ist der Inhalt eines isoperimetrischen regelmässigen Zwölfecks?

50. Gegeben der Umfang des einem Kreise eingeschriebenen regelmässigen 48-Ecks gleich 7: wie gross sind der Umfang und der Inhalt des regelmässigen Vielecks von doppelter Seitenanzahl in demselben Kreise?

51. Wie gross ist der Umfang des einem Kreise eingeschriebenen regelmässigen 25-Ecks, wenn die Seite des eingeschriebenen regelmässigen 18-Ecks gleich 1 gegeben ist?

52. Einem Kreise ist ein regelmässiges 16-Eck eingeschrieben vom Inhalt 100: wie gross ist der Inhalt des demselben Kreise eingeschriebenen regelmässigen 15-Ecks?

53. Einem Kreise, dessen Umfang gleich 1 gegeben ist, ist ein regelmässiges 12-Eck umgeschrieben, wie gross ist der Umfang desselben?

54. Den Inhalt eines regelmässigen 25-Ecks zu bestimmen, welches einem Kreise vom Inhalt 8 umgeschrieben ist.

55. Den Inhalt des einem regelmässigen Fünfeck eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, wenn der Umfang des umgeschriebenen Kreises gleich 24 gegeben ist.

56. Um wieviel ist ein eingeschriebenes regelmässiges Zehneck kleiner als der Kreis, wenn der Radius des Kreises gleich 8 gegeben ist?

57. Der Inhalt eines Kreises ist gleich 100 gegeben: um wieviel ist das eingeschriebene regelmässige Zwölfeck kleiner als das umschriebene regelmässige Achteck?

58. Um wieviel unterscheiden sich die Umfänge eines regelmässigen Fünfecks und Sechsecks, welche beide gleichen Inhalt, $= 12$, haben?

59. Um wieviel unterscheiden sich die Inhalte eines regelmässigen Achtecks und Neunecks, welche beide gleichen Umfang, $= 16$, haben?

60. Wie gross ist der Kreisring zwischen den einem regelmässigen 25-Eck eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreisen, wenn der Inhalt des 25-Ecks gleich 40 gegeben ist?

61. Der Inhalt eines regelmässigen 17-Ecks ist gleich 3 gegeben: wie gross ist ein Segment des umgeschriebenen Kreises über einer Seite?

62. Von einem regelmässigen Fünfeck sind die Diagonalen gleich 12 gegeben: den Inhalt zu bestimmen.

63. Von einem Quadrat mit der Seite 1 sind die Ecken abgeschnitten, so dass ein regelmässiges Achteck entsteht, wie gross ist der Inhalt dieses Achtecks?

64. Wie Aufg. 63; jedoch soll an Stelle des Quadrates ein regelmässiges Fünfeck treten und der Inhalt des entstehenden Zehnecks berechnet werden.

65. Den Umfang eines Kreises zu berechnen, welcher gleich ist einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seiten gleich 7 gegeben sind.

66. Von einem regelmässigen 27-Eck gegeben die Verbindungslinie eines Eckpunktes mit der Mitte der Gegenseite gleich d: wie gross der Inhalt?

67. In einem regelmässigen 11-Eck unterscheidet sich der Umfang von dem des umgeschriebenen Kreises um 5: wie gross ist der Inhalt des eingeschriebenen Kreises?

§ 17. Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks.

a. Figuren im und am Kreise.

1. Welche Sehne gehört zu dem Centriwinkel α in einem Kreise mit dem Radius r?

Gegeben. **a.** $r = 1$, $\alpha = 45°$.
b. $r = 5$, $\alpha = 67° 8'$.
c. $r = 12{,}456$, $\alpha = 124° 5{,}6'$.

2. Welcher Centriwinkel gehört in einem Kreise mit dem Radius r zur Sehne a?

Gegeben: **a.** $r = 0{,}3$, $a = 0{,}45$.

b. $r = 4{,}0506$, $a = 6{,}0504$.

3. Den Radius eines Kreises zu bestimmen, in welchem zum Centriwinkel α die Sehne a gehört.

a. $a = 5$, $\alpha = 133^0$.

b. $a = 6{,}54$, $\alpha = 32^0\,10'$.

4. Welcher Kreisbogen gehört zu einer Sehne gleich 5 und dem Centriwinkel $46^0\,29'$.

5. Welcher Bogen gehört zu einer Sehne a in einem Kreise mit dem Radius r?

a. $a = 6$; $r = 5$. **b.** $a = 5$; $r = 3$.

6. Welche Sehne gehört zu einem Kreisbogen gleich 8 und dem Centriwinkel 73^0?

7. Welche Sehne gehört zu einem Bogen gleich 5 in einem Kreise, dessen Inhalt gleich 100 gegeben ist?

8. Von einem Kreisausschnitt gegeben der Bogen gleich 5 und der Radius gleich 3: den Centriwinkel und die zugehörige Sehne zu berechnen.

9. Der Inhalt eines Kreisausschnittes ist 2,88, der Radius 2,16: wie gross die Sehne?

10. Der Inhalt eines Kreisausschnittes ist 29,748 und der Centriwinkel $53^0\,12'$: wie gross die Sehne?

11. Den Inhalt eines Kreises zu berechnen, von welchem eine Sehne gleich 5 und der Winkel der Tangenten an den Endpunkten derselben gleich $18^0\,44{,}2'$ gegeben sind.

12. Den Inhalt eines Kreisabschnittes zu berechnen, von welchem der Bogen b und der Radius r gegeben sind:

a. $b = 5$, $r = 6$. **b.** $b = 7$, $r = 5$. **c.** $b = 7$, $r = 4$.

13. Wie gross ist der Kreisabschnitt, welcher zu einem Ausschnitt gleich 18 gehört, wenn der Bogen gleich 3 gegeben ist?

14. Bogen und Inhalt eines Kreissegments zu berechnen, wenn die Tangenten an den Endpunkten des Bogens gleich 25 und ihr Winkel gleich 135^0 gegeben sind?

15. In welche Stücke wird ein Kreis, dessen Radius gleich 6 gegeben ist, durch eine Sehne gleich 10 getheilt?

16. In einen Kreis, dessen Inhalt 240 beträgt, ist eine Sehne gleich 7,5 eingetragen: wie gross ist der zugehörige kleinere Abschnitt?

17. Einem Halbkreise lassen sich der Reihe nach die Sehnen 2, 7, 2 einzeichnen: wie gross ist das Segment über der mittelsten dieser Sehnen?

18. An einen Kreis mit dem Radius 5 sind von einem Punkte ausserhalb zwei Tangenten gelegt unter dem Winkel $57^0\,23'$: wie gross ist die Figur zwischen ihnen und dem Kreise?

19. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises, der vom Mittelpunkte die Entfernung 3 hat, sind an den Kreis Tangenten gelegt: wie gross ist die Figur zwischen ihnen und dem Kreise, wenn der Radius des Kreises gleich 2 gegeben ist?

20. In zwei gegebenen Kreisen gehören zu einer und derselben Sehne die Centriwinkel $54^0\,13{,}2'$ und $12^0\,4{,}6'$: wie gross ist der Radius des letzteren Kreises, wenn der des ersteren gleich 5 gegeben ist?

21. Ueber den Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sind nach Aussen, über der Hypotenuse nach Innen Halbkreise errichtet: wie gross sind die mondförmigen Figuren über den Katheten?

a. Gegeben $a = 3$, $b = 4$. **b.** $a = 48$, $b = 55$.

22. Von einem Punkte der Peripherie eines Kreises mit dem Radius $r = 10$ sind nach derselben Seite hin die Seiten des regelmässigen Sechsecks und Fünfecks eingetragen: wie gross ist die ihre freien Endpunkte verbindende Sehne?

23. In einen Kreis mit dem Radius r sind zwei parallele Sehnen von der Länge a und b eingetragen: wie gross sind die von ihnen abgeschnittenen Bogen und das zwischen ihnen liegende Kreisstück? $r = 3$, $a = 4$, $b = 5$.

24. Aus einem Kreise mit dem Radius r ist ein Sektor ausgeschnitten, dessen Umfang gleich dem des Kreises ist: wie gross ist das übrig bleibende Stück des Kreises und die ihm zugehörige Sehne?

24a. Ein Quadrat, dessen Seiten gleich a gegeben sind, wird durch einen concentrischen Kreis von gleichem Inhalt durchschnitten: wie gross sind die krummlinigen Dreiecke an den Ecken des Quadrates und deren Seiten?

25. Welchen Winkel bilden die gemeinschaftlichen äusseren (inneren) Tangenten zweier Kreise mit einander, wenn die Radien $r_1 = 3$ und $r_2 = 2$ und die Centrale $= 6$ gegeben sind?

26. An zwei Kreise, deren Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3$ gegeben sind, sind die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten gelegt: wie gross ist die Centrale, wenn diese Tangenten sich unter

dem Winkel $\alpha = 20^0$ schneiden? unter welchem Winkel schneiden sich die gemeinschaftlichen inneren Tangenten? wie lang sind die äusseren (die inneren) Tangenten zwischen den Berührungspunkten?

27. An zwei Kreise, deren Centrale $c = 20$ gegeben ist, sind die gemeinschaftlichen äusseren und inneren Tangenten gelegt und bilden die ersteren mit einander den Winkel $\alpha = 18^0$, die letzteren den Winkel $\beta = 81^0$: wie gross sind die Radien der beiden Kreise?

---

28. Wie hoch ist ein Berg, den man im flachen Lande 100 km weit sieht, wenn die Erde als eine Kugel mit dem Radius 6365,5 km angenommen wird?

29. (Anschl.) Wie weit kann man von einem Berge aus sehen, dessen Höhe 3000 m beträgt?

30. (Anschl.) Wie hoch ist ein Berg, den man im flachen Lande von einer Höhe von 2000 m 200 km weit sieht?

31. In welcher geographischen Breite beträgt ein Grad des zugehörigen Parallelkreises bezüglich 100, 90, 80 km, wenn die Erde eine Kugel ist und der Umfang des Aequators 40069 km beträgt?

32. (Anschl.) Wie lang ist ein Grad des Parallelkreises durch Berlin, wenn die geographische Breite dieses Ortes $52^0\, 30{,}3'$ beträgt?

33. (Anschl.) Die terrestrische Entfernung von London und Leipzig zu bestimmen, welchen Orten dieselbe geographische Breite $51^0\, 26'$ zukommt, während ihre geographische Länge bezüglich $5^0\, 34'$ und $30^0\, 4'$ beträgt.

b. Vierecke.

34. Von einem Rechteck gegeben die Seiten $a = 4$, $b = 5$: den Winkel der Diagonalen zu bestimmen.

35. Von einem Rechteck gegeben eine Seite a und der Winkel der beiden Diagonalen α: die andere Seite und den Inhalt zu bestimmen; $a = 5$, $\alpha = 43^0\, 21'$.

36. Von einem Rechteck gegeben die Diagonalen d und ihr Winkel α: die Seiten und den Inhalt des Rechtecks zu bestimmen; $d = 7$, $\alpha = 53^0$.

37. Von einem Rechteck gegeben der Inhalt a^2 und der Winkel der Diagonalen α: die Seiten zu bestimmen; $a = 1$; $\alpha = 66^0\, 45'$.

38. Ein Rechteck, von welchem die Länge der Diagonalen d und ihr Winkel α gegeben sind, soll in ein zweites Rechteck verwandelt werden, dessen Diagonalen halb so gross sind, als d: welchen Winkel bilden die Diagonalen des zweiten Rechtecks? Gegeben $\alpha = 12^0\,34{,}5'$. Welchen Grenzwerth α_0 darf α nicht überschreiten?

---

39. Die Seiten und Winkel eines Rhombus zu bestimmen, von welchem die beiden Diagonalen d und d_1 gegeben sind; $d = 2{,}345$, $d_1 = 5{,}432$.

40. Von einem Rhombus gegeben die Seiten a und ein Winkel α: den Inhalt zu bestimmen und anzugeben, für welchen Winkel α_0 der Rhombus möglichst gross ist; $a = 5$, $\alpha = 67^0\,8{,}9'$.

41. Von einem Rhombus gegeben der Inhalt a^2 und ein Winkel α: wie gross die Seiten und die Diagonalen? Gegeben $a^2 = 5$, $\alpha = 46^0\,0{,}8'$.

42. Einem Rhombus ist ein Rechteck in der Weise eingeschrieben, dass die Seiten des Rechtecks den Diagonalen des Rhombus parallel sind. Die Seiten des Rechtecks zu bestimmen, wenn der Inhalt desselben gleich R und vom Rhombus die Seiten a und ein Winkel α gegeben sind. Welches ist der grösste Werth für R?

43. Einem Rechteck, von welchem die Seiten gleich a und b gegeben sind, ist ein Rhombus in der Weise eingeschrieben, dass die Diagonalen des letzteren mit den Seiten des ersteren den Winkel α bilden: den Inhalt des Rhombus zu bestimmen. Für welchen Werth α_0 von α ist der Rhombus möglichst klein?

44. Einem Quadrat mit der Seite a ist ein zweites in der Weise eingeschrieben, dass die Seiten des einen mit denen des anderen die Winkel α bilden (bezüglich $90^0 - \alpha$): wie gross ist der Inhalt des eingeschriebenen Quadrates? Für welchen Winkel α_0 ist das eingeschriebene Quadrat möglichst klein?

45. Durch den Mittelpunkt eines Quadrates ist zwischen zwei Gegenseiten eine Linie von der Länge a gezogen, welche mit diesen Seiten den Winkel α bildet: den Inhalt des Quadrates zu bestimmen und anzugeben, in welchem Verhältniss $\lambda : \mu$ durch die Linie a die Gegenseiten getheilt werden.

46. Einem Quadrat mit der Seite a ist ein gleichseitiges Dreieck in der Weise eingezeichnet, dass beide Figuren einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben: den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen.

47. Von einem convexen Viereck, welches durch eine Diagonale c in zwei gleichschenklige Dreiecke mit den gleichen Seitenpaaren a und b, bezüglich mit den ein-eingeschlossenen Winkeln α und β, getheilt wird, während die zweite Diagonale d sein mag, sind gegeben die Seiten a und die Winkel α und β: den Inhalt zu bestimmen.

48. (Anschl.) Den Inhalt zu bestimmen, wenn die Diagonale c und die Winkel α und β gegeben sind: welches ist alsdann der Ausdruck für die andere Diagonale?

49. (Anschl.) Den Inhalt zu bestimmen, wenn die Diagonale d und die Winkel α und β gegeben sind.

50. Von einem Antiparallelogramm (gleichschenkligen Trapez) gegeben die parallelen Seiten a und b, ($a > b$), und die Winkel an a gleich α: die nicht parallelen Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

51. Gegeben der Inhalt eines Antiparallelogramms $fl = 12$ und die parallelen Seiten $a = 5$, $b = 3$: den Winkel α und die nicht parallelen Seiten c bestimmen.

52. (Anschl.) Den Inhalt, die parallelen Seiten und die Winkel eines Antiparallelogramms zu bestimmen, wenn die Abschnitte der beiden Diagonalen d_1 und d_2, sowie ihr Winkel γ gegeben sind.

53. Von einem Trapez mit zwei rechten Winkeln gegeben die parallelen Seiten a und b, wo $a > b$, und der Winkel α an a: den Inhalt zu bestimmen.

54. Von einem Trapez, in welchem drei Seiten einander gleich sind, gegeben die vierte Seite a und die ihr anliegenden Winkel α: die gleichen Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

55. (Anschl.) Gegeben der Inhalt fl und die Winkel α: die Seiten zu bestimmen.

56. Einem Halbkreise mit dem Radius c ist ein Trapez eingezeichnet, von welchem die Winkel am Durchmesser gleich α gegeben sind: die Seiten, die Diagonalen und den Inhalt zu bestimmen.

c. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

57. Die Höhe eines Thurmes zu bestimmen, dessen Spitze senkrecht über dem Fusspunkt A liegt, wenn eine horizontale Standlinie AC gemessen werden kann und der Elevationswinkel γ der Spitze in C.

a. Gegeben die Standlinie $= 135{,}7$m, $\gamma = 13^0\ 5{,}7'$.
b. „ „ „ $= 105$m, $\gamma = 39^0\ 58'$.

58. Wie Aufg. **57**, jedoch ist die bis zum Fusse A zu messende Standlinie AC gegen den Horizont unter dem Winkel δ geneigt und zwar liege C höher als A.

Gegeben a. $AC = 137$m, $\gamma = 13^0$, $\delta = 11^0\,25{,}6'$.
b. $AC = 144$m, $\gamma = 14^0\,4'$, $\delta = 4^0\,14'$.

59. Wie Aufg. **58**, jedoch liege der Standpunkt C tiefer als der Fuss A des Thurmes.

Gegeben a. $AC = 25$m, $\gamma = 58^0\,45'$, $\delta = 5^0\,27'$.
b. $AC = 123{,}4$m, $\gamma = 23^0\,45'$, $\delta = 6^0\,5'$.

60. Von der Höhe h eines Leuchtthurmes beobachtet man ein Schiff C unter dem Depressionswinkel δ: welche Entfernung hat C vom Fuss des Thurmes und dem Beobachtungspunkte?

Gegeben a. $h = 32{,}1$m, $\delta = 4^0\,3{,}2'$.
b. $h = 32{,}1$m, $\delta = 7^0\,6{,}5'$.

61. Man beobachtet von einem Punkte aus, der in derselben Horizontalebene mit dem Fuss eines Berges und von diesem 2345m entfernt liegt, eine auf dem Berge befindliche Spitze, welche 24m hoch ist, und findet den Elevationswinkel des höchsten Punktes derselben gleich $8^0\,7{,}6'$: welches ist die Höhe des Berges?

62. Aus der Schattenlänge l einer h Meter hohen Stange die Höhe der Sonne zu bestimmen.

63. Welche Länge hat der Schatten eines 87m hohen Thurmes, wenn die Höhe der Sonne $65^0\,43{,}2'$ beträgt? (Vergl. später angew. Trigon. § 38).

---

64. Die Flugbahn eines Geschosses werde als ein Kreisbogen angesehen. Gegeben die Wurfweite $a = 400$m und die Steigehöhe $h = 20$m: den Elevationswinkel α und den Radius des Kreises zu bestimmen.

65. (Anschl.) Gegeben der Elevationswinkel $\alpha = 4^0\,56'$ und die Wurfweite $= 456$m: die Steigehöhe h und den Radius der kreisförmigen Flugbahn zu bestimmen.

66. (Anschl.) Gegeben der Elevationswinkel $\alpha = 5^0$ und die Steigehöhe $h = 50$m: die Wurfweite und den Radius der Flugbahn zu bestimmen.

67. (Anschl.) Die kreisförmige Flugbahn soll durch die Punkte B und C gehen, deren horizontaler Abstand vom Geschütz bezüglich 300m und 320m und deren Höhe über der Horizontalebene bezüglich 30m und 29m sein soll: den Elevationswinkel α zu bestimmen.

68. (Anschl.) Ein Geschoss wird unter dem Elevationswinkel α geworfen und geht auf seiner Bahn durch den Punkt B, der in einer Höhe von 16m und in dem horizontalen Abstand 300m vom Geschütz liegt: wie gross ist die Wurfweite?

Gegeben $\alpha = 6^0$.

---

69. Unter welchem Sehwinkel erscheint eine Anhöhe h für einen Punkt der Horizontalebene, dessen Entfernung das 50fache von h beträgt?

70. (Anschl.) Der Sehwinkel einer Anhöhe h betrage $45'$: das Wievielfache von h ist die Entfernung des Beobachtungspunktes?

71. Unter welchem Sehwinkel α erscheint eine Anhöhe von h Meter in der Entfernung a Meter von einem Punkte aus, der selbst h_1 Meter über der Horizontalebene gelegen ist? Für welchen Werth von h_1 wird der Sehwinkel möglichst gross? Numer. Beisp. $h = 34$, $a = 567$, $h_1 = 9$.

72. Welche Dicke muss eine Nadel besitzen, die bis zu einer Entfernung von 5m noch sichtbar sein soll, wenn man $40''$ als Grenze des Sehwinkels annimmt?

73. (Anschl.) In welcher Entfernung vom Beobachter scheinen die Schienen einer Eisenbahn, welche eine Entfernung von 1,47m haben, zusammenzulaufen?

74. Wie gross ist der wirkliche Durchmesser der Sonne, wenn ihr scheinbarer Durchmesser 32 Minuten und ihre Entfernung von der Erde 153 Million km beträgt?

75. (Anschl.) Unter welchem Winkel erscheint für dieselbe Annahme wie in Aufg. **74**, vom Mittelpunkt der Sonne aus gesehen, der Halbmesser der Erde, wenn dieser gleich 6365,5km angenommen wird: d. h. wie gross ist die Horizontalparallaxe der Sonne?

76. (Anschl.) Die Horizontalparallaxe des Mondes zu bestimmen, dessen mittlere Entfernung von der Erde das 59,965fache des Erdradius beträgt.

77. (Anschl.) Wie gross ist der scheinbare Durchmesser des Mondes, wenn sein wahrer Durchmesser 3481km beträgt?

78. Der mittlere scheinbare Durchmesser des Mondes ist $31'\,5''$, der Durchmesser eines Fünfpfennigstückes 1,85cm: in welcher Entfernung vom Auge vermag das letztere den Mond noch zu bedecken?

---

79. Eine Eisenbahn soll in einem Kreisbogen aus der Richtung AB in die Richtung CD übergeführt werden: wie gross der Radius und der Bogen BC, wenn die Entfernung der Punkte B und C gleich 800m, Winkel $(AB, CD) = 135^0 45'$ und der Winkel $ABC = BCD$ gegeben ist.

80. (Anschl.) Eine Eisenbahn verbindet in kreisförmiger Curve vom Radius 1000m die um 800m von einander entfernten Punkte B und C zweier gradlinigen Strecken AB und CD: welchen Winkel bilden diese mit einander, und wie lang ist die Bahnstrecke (der Bogen) BC, wenn Winkel $ABC = BCD$?

81. Eine Eisenbahn soll zwei parallele Strecken AB und CD vermittelst zweier Kreisbogen verbinden, von denen der eine AB in B, der andere CD in C berühren soll und die beide durch den Mittelpunkt E der Verbindungsgeraden BC gehen sollen. Gegeben $ABC = 165^0$ und $BC = 600$m. Die Länge der Bahn BEC zu berechnen.

82. Wie Aufg. **81**; jedoch soll die Lage des Punktes E auf BC eine derartige sein, dass sich $BE : EC = 2 : 3$ verhält.

B. Schiefwinklige Dreiecke.

§ 18. Die Fundamentalaufgaben.

Bezeichnet werden durch a, b, c die Seiten eines Dreiecks, durch α, β, γ die entsprechenden Gegenwinkel und weitere den Seiten zugehörige Stücke durch die betreffende Seite als Index.

a. Gegeben eine Seite und zwei Winkel.

1. Geg.	$a = 15$,	$\alpha = 67^0$,	$\beta = 58^0$:	gesucht die fehlenden Seiten.
2.	$c = 1005$,	$\alpha = 78^0 19'$,	$\beta = 54^0 27'$:	
3.	$b = 13{,}57$,	$\beta = 13^0 57'$,	$\gamma = 57^0 13'$:	
4.	$a = 17$,	$\beta = 46^0 47{,}4'$,	$\gamma = 98^0 12{,}6'$:	
5.	$b = 34{,}567$,	$\beta = 34^0 56{,}7'$,	$\alpha = 76^0 54{,}3'$:	
6.	$a = 34{,}567$,	$\beta = 34^0 56{,}7'$,	$\alpha = 45^0 57{,}8'$:	

7. Von einem Dreieck gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel: den Inhalt zu berechnen, algebraisch und numerisch für die Werthe:

a. $a = 14$, $\beta = 67^0\, 22{,}8'$, $\gamma = 53^0\, 7{,}8'$.

b. $a = 8$, $\beta = 55^0\, 35'$, $\gamma = 69^0\, 8'$.

c. $a = 34$, $\beta = 29^0\, 8'$, $\gamma = 110^0\, 29'$.

8. Von einem Dreieck gegeben die Höhe h_a zur Seite a und die Winkel an derselben Seite: die Seite a zu bestimmen algebraisch und numerisch für die Werthe $h_a = 72$, $\beta = 47^0\, 50{,}5'$, $\gamma = 53^0\, 7{,}8'$. (Vergl. § 16, Aufg. 30).

9. Von einem Parallelogramm gegeben eine Diagonale d und deren Winkel α und β mit den Seiten: die Seiten und den Inhalt zu berechnen. Geg. $d = 11{,}237$, $\alpha = 19^0\, 1'$, $\beta = 42^0\, 54'$.

10. Von einem Trapez gegeben die beiden parallelen Seiten a und b und die Winkel α und β an einer derselben: die nicht parallelen Seiten und den Inhalt zu berechnen, algebraisch und numerisch für die Werthe:

a. $a = 15$, $b = 7$, $\alpha = 70^0$, $\beta = 40^0$.

b. $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 78^0$, $\beta = 65^0\, 40'$.

11. Von einem Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten c einander gleich sind (Antiparallelogramm), gegeben eine Diagonale d und die Winkel α und β, welche sie an einem Endpunkt bezüglich mit einer der parallelen Seiten a und mit c bildet: die Seiten und den Inhalt algebraisch darzustellen.

12. Von einem Viereck gegeben eine Diagonale d und die ihr anliegenden Winkel α_1 und α_2, β_1 und β_2, wo α_1 und β_1, sowie α_2 und β_2 verschiedenen Dreiecken angehören: den Inhalt zu berechnen.
Geg. $d = 5$, $\alpha_1 = 24^0\, 36'$, $\alpha_2 = 36^0\, 24'$, $\beta_1 = 45^0\, 55'$, $\beta_2 = 55^0\, 45'$.

13. Ueber einer Linie von gegebener Länge d ist ein gleichseitiges Dreieck unter der Bedingung construirt, dass durch d ein Winkel des Dreiecks im Verhältniss von $2:3$ getheilt wird: die Seiten und den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen.

14. In dem regelmässigen Vieleck $ABCD\ldots$ sind die beiden Diagonalen AD und BD gezogen: die Seiten und den Inhalt zu bestimmen, wenn ausser der Seitenanzahl n gegeben ist:
a. die Diagonale $BD = d_1$. **b.** die Diagonale $AD = d_2$.

b. Gegeben zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen.

15.	Gegeben	$a = 24$,	$c = 13$,	$\alpha = 115^0$.	Gesucht die fehlenden Stücke.
16.	„	$a = 34$,	$b = 35{,}79$,	$\beta = 17^0\, 59'$.	
17.	„	$b = 17$,	$c = 16$,	$\beta = 300^0\, 9{,}9'$.	
18.	„	$a = 39$,	$b = 27{,}625$,	$\alpha = 78^0\, 19{,}3'$.	
19.	„	$a = 22$,	$b = 34$,	$\alpha = 30^0\, 20'$.	
20.	„	$b = 19$,	$c = 18$,	$\gamma = 15^0\, 49'$.	

21. Von einem Dreieck gegeben zwei Seiten a und b und der Gegenwinkel der einen α: die Bedingungen darzustellen, unter welchen die Aufgabe nur eine einzige, keine oder zwei Lösungen gestattet.

21a. Von einem Dreieck gegeben

$$a = 75, \quad b = 29, \quad \beta = 16^0\, 15{,}6:$$

um wieviel unterscheiden sich ihrem Inhalte nach die beiden zugehörigen Dreiecke?

22. Von dem Viereck $ABCD$ gegeben die in einer Ecke zusammenstossenden Seiten und Diagonale und die beiden von der Diagonale nicht durchschnittenen Winkel: den Inhalt zu bestimmen. ($AB = 2$, $AD = 3$, $AC = 4$, $ABC = 110^0$, $ADC = 100^0$.)

23. Von einem Dreieck gegeben eine Seite, ein anliegender Winkel und die Halbirungslinie des zweiten anliegenden Winkels bis zur Gegenseite: die fehlenden Stücke zu bestimmen. ($a = 3$, $\beta = 85^0$, $t_c = 4$.)

24. Von einem Dreieck gegeben zwei Mittellinien (Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Mitten der Gegenseiten) und der Winkel, welchen eine derselben mit derjenigen Seite bildet, von deren Endpunkten aus die Mittellinien gezogen sind: diese Seite zu berechnen. (Determination).

Gegeben $m_b = 2$, $m_c = 3$, $\angle (m_b, a) = 23^0\, 32' = \beta_1$.

25. Von einem Parallelogramm gegeben eine Seite a, eine Diagonale d und der Winkel α, den diese Diagonale mit der Seite b bildet: diese Seite, die Winkel und den Inhalt des Parallelogramms zu berechnen.

Gegeben $a = 10{,}3$, $d = 12$, $\alpha = 21^0\, 14{,}4'$.

26. Durch einen Punkt P im Innern eines Kreises mit dem Radius $r = 2$, der vom Mittelpunkt die Entfernung 1 hat, sind zwei Sehnen gelegt, welche einen Winkel von $56^0\, 7{,}8'$ mit einander bilden und von denen die eine durch den Mittelpunkt des Kreises geht: wie gross die Abschnitte der anderen Sehne? (wie gross ist das aus ihnen gebildete Rechteck?)

27. Von einem Punkte P ausserhalb eines Kreises mit dem Radius 1, der vom Mittelpunkte die Entfernung 2 hat, sind zwei Secanten durch den Kreis gelegt, welche einen Winkel von $23^0\,45{,}6'$ mit einander bilden und von denen die eine durch den Mittelpunkt geht: wie gross sind die Abschnitte der anderen Secante (und ihr Produkt)?

28. Durch einen Punkt P auf der Verlängerung eines Kreisdurchmessers ist durch den Kreis eine Secante gelegt und deren Schnittpunkte mit dem Kreise, A und B, sind mit dem Mittelpunkte M verbunden: den Inhalt des Dreiecks AMB zu berechnen, wenn $MP=c$, der Radius r und der Winkel $APM=\delta$ gegeben sind. Für welchen Werth von δ wird dieses Dreieck möglichst gross?

c. Gegeben die drei Seiten.

29.	Gegeben $a=7$,	$b=8$,	$c=9$.		
	„ $a=6$,	$b=8$,	$c=10$.		
	„ $a=5$,	$b=8$,	$c=11$.		
30.	„ $a=5$,	$b=4$,	$c=2$.		
	„ $a=6$,	$b=4$,	$c=3$.		
	„ $a=12$,	$b=13$,	$c=14$.		Gesucht
31.	„ $a=45{,}7$,	$b=38{,}5$,	$c=42{,}52$.		
	„ $a=567$,	$b=678$,	$c=789$.		die
	„ $a=3456$,	$b=4567$,	$c=2345$.		
32.	„ $a=\sqrt{3}$,	$b=2$,	$c=\sqrt{5}$.		Winkel.
	„ $a=\sqrt{5}$,	$b=\sqrt{6}$,	$c=\sqrt{7}$.		
33.	„ $a=5{,}001$,	$b=6{,}002$,	$c=7{,}003$.		
	„ $a=37{,}493$,	$b=29{,}867$,	$c=40{,}005$.		
	„ $a=20{,}052$,	$b=25{,}166$,	$c=34{,}567$.		

34. Gegeben die Seiten eines Dreiecks gleich 6, 7, 8: die Winkel zu bestimmen und den Umfang eines gleich grossen Kreises.

35. Um wieviel ändert sich der grösste Winkel des Dreiecks mit den Seiten 5, 12, 13, jenachdem man die kleinste Seite um 1 verkleinert oder vergrössert? (Vergl. Aufg. 29).

36. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 12:23:34: die Winkel zu bestimmen.

37. (Anschl.) Die Höhen eines Dreiecks h_a, h_b, h_c sind gleich 3, 4, 5 gegeben: den grössten Winkel zu bestimmen.

37a. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen den Höhen eines Dreiecks statt, wenn der Winkel γ ein rechter sein soll?

38. Die Halbirungslinien AA_1 und BB_1 zweier Winkel des Dreiecks ABC theilen die Gegenseiten in gegebenem Verhältniss, nämlich $BA_1 : A_1C = \lambda_1 : \lambda_2$ und $CB_1 : B_1A = \mu_1 : \mu_2$: den Winkel C des Dreiecks zu bestimmen.

39. Von einem Parallelogramm sind die Seiten und eine Diagonale gegeben: die Winkel und den Inhalt des Parallelogramms zu bestimmen.

40. Die Winkel und den Inhalt eines Trapezes zu berechnen, von dem die vier Seiten gegeben sind. Gegeben die parallelen Seiten $a = 16$, $b = 10$ und die nicht parallelen $c = 4$, $d = 5$.

41. Die Winkel eines Vierecks zu berechnen, von welchem die vier Seiten und eine Diagonale gegeben sind. Gegeben $AB = 12$, $BC = 14$, $CD = 16$, $DA = 18$, $AC = 13$.

42. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, welches von den Seiten des demselben Kreise eingeschriebenen regelmässigen Fünfecks, Sechsecks, Zehnecks gebildet wird.

43. Von einem Dreieck gegeben die drei Mittellinien m_a, m_b, m_c: die Seiten und Winkel des Dreiecks zu berechnen.

d. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

44. Gegeben	$a = 17$,	$b = 12$,	$\gamma = 59^0\ 17'$.
	$a = 566$,	$c = 384$,	$\beta = 48^0\ 36'$.
45.	$a = 12{,}34$,	$b = 43{,}21$,	$\gamma = 34^0\ 12'$.
	$c = 4{,}567$,	$b = 3{,}456$,	$\alpha = 56^0\ 7{,}8'$.
46.	$b = \sqrt{5}$,	$c = \sqrt{3}$,	$\alpha = 35^0\ 53'$.
	$a = 34{,}56$,	$b = 45{,}67$,	$\gamma = 67^0\ 45'$.
47.	$a = 1{,}357$,	$c = 2{,}468$,	$\beta = 35^0\ 7'$.
	$a = 3{,}579$,	$c = 1{,}2468$,	$\beta = 97^0\ 53'$.
48.	$a = 189$,	$b = 114{,}75$,	$\gamma = 107^0\ 48'$.
	$a = 723{,}79$,	$b = 598{,}46$,	$\gamma = 47^0\ 35{,}4'$.

49. Von einem Dreieck gegeben zwei Seiten gleich 5 und 6 und der eingeschlossene Winkel $55^0\ 7{,}8'$: wie gross die dritte Seite und der über ihr liegende Bogen des umschriebenen Kreises?

50. Von einem Dreieck gegeben ein Winkel α und die auf die einschliessenden Seiten gefällten Höhen h_b und h_c: den Inhalt und die dritte Seite a zu berechnen, algebraisch und numerisch für die Werthe $h_b = 1$, $h_c = 2$, $\alpha = 76^0\ 54{,}3'$.

51. Die Verbindungslinien der Fusspunkte der Höhen eines Dreiecks darzustellen, wenn man die Seiten und Winkel desselben als bekannt annimmt.

52. Von einem Dreieck gegeben ein Winkel α und die Verbindungslinien des Mittelpunktes des inneren Berührungskreises mit den Endpunkten der Gegenseite l_b und l_c: die Seite a zu berechnen und den Radius des inneren Berührungskreises.

53. Von einem Parallelogramm gegeben die Seiten und ein Winkel: die Diagonalen zu berechnen (und die Summe ihrer Quadrate): algebraisch und numerisch für die Werthe: $a = 15$, $b = 26$, $\gamma = 126^0\,52{,}2'$.

54. Von einem Parallelogramm gegeben die beiden Diagonalen d_1 und d_2 und der von ihnen eingeschlossene Winkel δ: die Seiten, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen. Gegeben $d_1 = 5$, $d_2 = 6$, $\delta = 49^0\,18'$.

55. Von einem Antiparallelogramm gegeben zwei anstossende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel: die dritte Seite, die Diagonale und den Inhalt zu bestimmen.

56. Von einem Trapez gegeben die beiden parallelen Seiten a und b, $a > b$, eine der nicht parallelen Seiten c und der von a und c eingeschlossene Winkel δ: die vierte Seite, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

Gegeben $a = 11{,}5$, $b = 8{,}5$, $c = 4$, $\delta = 89^0$.

57. Von einem Vierseit im Kreise gegeben zwei Seiten a und b und die Winkel γ_1 und γ_2, welche a und b bezüglich mit der durch ihren gemeinschaftlichen Eckpunkt gehenden Diagonale bilden, die Diagonalen und den Inhalt zu bestimmen.

58. Von einem Vierseit im Kreise gegeben zwei Seiten a und b, der eingeschlossene Winkel γ und die anliegenden Winkel als rechte Winkel: die beiden fehlenden Seiten und den Inhalt zu bestimmen, algebraisch und numerisch für die Werthe $a = 3$, $b = 5$, $\gamma = 53^0\,19'$.

e. Vermischte Aufgaben.

59. In dem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC ist der Eckpunkt A mit dem Punkte A_1 der Gegenkathete verbunden, so dass $BA_1 : A_1C = \lambda : \mu$: wie gross die Theile des Winkels A, wenn derselbe gleich α gegeben ist, algebraisch und numerisch für die Werthe $\alpha = 70^0$, $\lambda : \mu = 2 : 1$?

60. Von einem rechtwinkligen Dreieck gegeben ein Winkel $\alpha = 78^0\,46'$ und seine Halbirungslinie gleich 5: die Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

61. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze ($= 47^0$) in drei gleiche Theile getheilt, wie verhalten sich die Abschnitte der Basis zu einander?

62. Der Centriwinkel ($= 64^0\ 25{,}4'$) eines Kreises ist durch eine gerade Linie im Verhältniss von $3 : 4$ getheilt: wie verhalten sich die Abschnitte der zugehörigen Sehne?

63. Die Seite BC des Dreiecks ABC ist durch den Punkt A_1 so getheilt, dass sich $BA_1 : A_1C = 2 : 3$ verhält: wie gross ist die Verbindungslinie AA_1, wenn die Seiten $a = 15$, $b = 37$, $c = 44$ gegeben sind?

64. Der Winkel A des Dreiecks ABC ist durch die Linie AA_1 so getheilt, dass sich $BAA_1 : CAA_1 = 2 : 3$ verhält: wie gross ist die Linie AA_1, wenn die Seiten $a = 15$, $b = 37$, $c = 44$ gegeben sind?

65. Von einem Dreieck gegeben zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α: welches ist der Ausdruck für die Mittellinie zur Seite a?

66. (Anschl.) Unter gleicher Voraussetzung wie in Aufg. **65** die Linie AA_1 darzustellen, welche die Seite BC so theilt, dass sich $BA_1 : A_1C = \lambda : \mu$ verhält.

67. Den Inhalt eines Vierecks darzustellen, von welchem die beiden Diagonalen e und f und ihr Winkel θ gegeben sind.

68. Mit der Seite AB des Dreiecks ABC als Radius wird um A ein Kreis beschrieben, welcher die Seite BC im Punkte A_1 durchschneidet: wie gross sind die Abschnitte von BC? Gegeben $a = 86$, $b = 97$, $c = 75$.

69. Um die Punkte A und B, deren Entfernung $c = 40{,}8$ beträgt, als Mittelpunkte sind Kreise beschrieben, bezüglich mit den Halbmessern 40,1 und 4,1: unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kreise, und wie gross ist das beiden gemeinschaftliche Segment?

70. Eine Secante wird von einer Tangente unter dem Winkel α so geschnitten, dass ihr äusserer Abschnitt gleich b, der innere Abschnitt gleich c wird: wie gross der Radius des Kreises? Gegeben **a.** $b = 5$, $c = 7$, $\alpha = 101^0\ 37'$.
b. $b = 5{,}75$, $c = 6{,}525$, $\alpha = 54^0\ 31{,}3'$.

71. Die Peripherie eines Kreises, dessen Radius $r\ (= 1)$ gegeben ist, ist durch die Punkte A, B, C in drei Theile getheilt,

4*

so dass die Bogen $AB : BC : CA = 11 : 12 : 13$: wie gross ist das Dreieck ABC und das durch die Tangenten in A, B, C begrenzte Dreieck $A_1B_1C_1$?

72. Von einem Viereck im Kreise sind zwei anstossende Seiten und die Winkel gegeben: die fehlenden Seiten und den Inhalt zu bestimmen. Gegeben $a = 13$, $b = 14$, $\gamma = 67^0\,22{,}8'$, $\alpha = 100^0$. (Vergl. Aufg. 58.)

73. Von einem Viereck gegeben die vier Seiten und ein Winkel: den gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.

Gegeben $a = 3{,}38$, $b = 10{,}573$, $c = 15{,}7$, $d = 28{,}106$
$\measuredangle\,(ab) = \alpha = 131^0$.

74—76. Im Viereck $ABCD$ seien bezeichnet die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, die Diagonalen $AC = e$, $BD = f$, die Winkel $ABC = \beta$, $BCD = \gamma$, $ABD = \beta_1$, $CBD = \beta_2$, $BCA = \gamma_1$, $ACD = \gamma_2$.

74. Gegeben a, b, c, β, γ: gesucht die Tangenten der Winkel β_1, β_2, γ_1, γ_2.

75. Gegeben a, c, e, α_1, γ_1: gesucht f.

76. Gegeben e, f, a, $CAB = \alpha_1$, β_1: gesucht der Ausdruck für die Gegenseite c von a.

§ 19. Unmittelbare Anwendung der Fundamentalaufgaben vom schiefwinkligen Dreieck.

a. Dreiecksaufgaben.

Bezeichnet werden im Folgenden die Seiten des Dreiecks ABC durch a, b, c, entsprechend den gegenüberliegenden Ecken A, B, C, die ihnen zugehörigen Höhen durch h_a, h_b, h_c, die Mittellinien durch m_a, m_b, m_c, die Halbirungslinien der Innenwinkel durch t_a, t_b, t_c, der Radius des umschriebenen Kreises durch r, der des inneren Berührungskreises durch ϱ, im Uebrigen wie in § 18.

1. Von einem Dreieck gegeben zwei Winkel und ein unterer Höhenabschnitt, (zwischen Höhenschnittpunkt und Seite), nämlich

a. $k_a = 1$, $\alpha = 47^0\,19'$, $\beta = 52^0\,54'$;
b. $k_c = 24{,}36$, $\beta = 24^0\,36'$, $\gamma = 36^0\,24'$:

gesucht die Seiten des Dreiecks.

2. Gegeben die Halbirungslinie eines Winkels und die beiden anderen Winkel: die Seiten und den Inhalt berechnen.

$t_a = 9$, $\beta = 87^0\,6{,}5'$, $\gamma = 54^0\,32{,}1'$.

3. Gegeben der Radius des umschriebenen Kreises und zwei Winkel: die Seiten zu bestimmen.

a. $r = 12$, $\alpha = 78^0$, $\beta = 65^0$.

b. $r = 7$, $\alpha = 66^0$, $\beta = 55^0\,44{,}4'$.

4. Gegeben der Radius des inneren Berührungskreises und zwei Winkel: die Seiten zu bestimmen.

a. $\varrho = 5$, $\alpha = 76^0\,19'$, $\beta = 59^0$.

b. $\varrho = 5$, $\alpha = 58^0\,44'$, $\beta = 46^0\,28'$.

5. Gegeben eine Seite, die zugehörige Mittellinie und der Winkel beider, gesucht die Seiten.

Gegeben $a = 12$, $m_a = 3{,}4$, $\delta = 56^0\,7{,}8'$.

6. Von einem Dreieck gegeben zwei Höhen und der von ihnen eingeschlossene Winkel: den Inhalt zu bestimmen.

Gegeben $h_b = 7$, $h_c = 8$, $\delta = 145^0\,33'$. (§ 18, Aufg. 50.)

7. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem eine Seite (a) und die Halbirunglinien der ihr anliegenden Winkel bis zu ihrem Schnittpunkte (e und f) gegeben sind.

Gegeben a. $a = 7$, $e = 4$, $f = 4{,}5$.

b. $a = 15$, $e = 8$, $f = 9$.

8. Gegeben zwei Seiten eines Dreiecks und die Höhe auf die dritte Seite: diese, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

Gegeben $b = 40{,}1$, $c = 4{,}1$, $h_a = 4$.

9. Gegeben die Halbirungslinien zweier Winkel eines Dreiecks bis zu ihrer Durchschneidung (3,2 und 4,8) und der Radius des inneren Berührungskreises (1,7): die Seiten, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

10. Gegeben eine Seite eines Dreiecks und die Höhen auf die beiden anderen Seiten: Winkel, Seiten und Inhalt zu bestimmen. Gegeben $a = 25$, $h_b = 24$, $h_c = 20$.

11. Von einem Dreieck gegeben ein Winkel ($110^0\,36{,}6'$) und die beiden ihn in drei gleiche Stücke theilenden Linien (5 und 4): die Seiten, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

12. Gegeben die Mittellinie und die Höhe auf eine Seite eines Dreiecks und die grösste der beiden anderen Seiten: die fehlenden Seiten, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

Gegeben $a = 18$, $h_c = 15$, $m_c = 17$.

13. (Anschl.) Wie gross ist der Inhalt des umschriebenen Kreises und der des inneren Berührungskreises?

14. Von einem Dreieck gegeben die Mittellinie und die Höhe auf eine Seite und der grösste ihr anliegende Winkel: den Radius des umschriebenen Kreises zu bestimmen.

Gegeben $h_a = 7$, $m_a = 9$, $\gamma = 58^0\,19'$.

15. Gegeben die Halbirungslinie eines Winkels eines Dreiecks (6,5), die Höhe auf die Gegenseite (6,3) und der kleinste der dieser anliegenden Winkel ($32^0\,30'$): die Seiten und Winkel zu bestimmen.

16. Von einem Dreieck gegeben die Halbirungslinie eines Winkels (10,1), die Höhe auf die Gegenseite (9) und die kleinste der beiden anderen Seiten (10); die Seiten und Winkel zu bestimmen.

17. Von einem Punkte D ausserhalb einer geraden Linie sind nach drei Punkten derselben A, B, C gerade Linien gezogen, welche mit ihr gegebene Winkel bilden ($DAB = \alpha = 57^0\,18'$, $DBC = \beta = 68^0\,19'$, $BCD = \gamma = 100^0\,45{,}5'$): DC zu berechnen, wenn $AB = c$ gegeben ist.

18. Der Eckpunkt A des Dreiecks ABC ist mit dem Punkte D der Gegenseite verbunden, so dass $AD = d = 14{,}23$ $\measuredangle\, ADC = \delta = 61^0\,0{,}9'$: die Gegenseite a zu berechnen, wenn $b = 19{,}87$ und $c = 15$ gegeben sind.

b. Vierecksaufgaben.

19. Von einem Trapez gegeben eine der parallelen Seiten ($b = 6$), die beiden nicht parallelen Seiten ($c = 8$, $d = 7$) und der von der letzteren und der zweiten nicht parallelen Seite eingeschlossene Winkel ($\beta = 65^0\,43{,}2'$): die fehlenden Stücke, den Inhalt mit eingeschlossen, zu bestimmen.

20. Von einem Trapez gegeben die beiden parallelen Seiten $a = 12$, $b = 7$, eine der nicht parallelen $c = 3$ und der Winkel $(a, d) = 15^0\,48'$: die fehlenden Stücke zu bestimmen.

21. Von einem Trapez gegeben die beiden nicht parallelen Seiten $c = 3{,}7$, $d = 2{,}6$ und der Winkel, den sie verlängert bilden, gleich $18^0\,55{,}5'$, ferner die Mittellinie (Verbindungslinie der Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten) gleich 4.

22. Von einem Trapez gegeben die Höhe $h = 12$, die Mittellinie (Aufg. 21) $= 24$ und die Winkel an einer der parallelen Seiten $= 67^0\,22{,}8'$ und $53^0\,7{,}8'$: die Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

23. Von einem Trapez gegeben eine Diagonale gleich e, die Winkel, welche sie mit den parallelen Seiten bildet, $= \alpha$ und die parallelen Seiten selbst $= a$ und b: die andere Diagonale zu berechnen, $a = 3{,}6$, $b = 1{,}7$, $e = 5{,}1$, $\alpha = 59^0\ 57{,}8'$.

24. Von einem Viereck im Kreise gegeben die vier auf einander folgenden Seiten a, b, c, d: die Winkel und den Inhalt zu bestimmen. (Vergl. Aufg. 40.)

Gegeben **a.** $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$.
$a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$.

25. Von einem Viereck im Kreise gegeben zwei Gegenseiten $a = 5$, $c = 3$ und die beiden Diagonalen $e = 6$, $f = 7$: die fehlenden Seiten, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

26. Von einem Viereck im Kreise gegeben zwei Gegenseiten a und c und die Winkel δ und ε, welche dieselben mit den Diagonalen bilden: das Verhältniss der beiden Diagonalen zu bestimmen.

27. Von einem Viereck gegeben zwei Gegenseiten $a = 37$, $c = 13$ und die Winkel $(a, b) = \alpha = 107^0\ 56{,}7'$, $(b, c) = \beta = 67^0\ 23{,}8'$, $(c, d) = \gamma = 165^0\ 45'$: die Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

28. Von einem Viereck gegeben drei Seiten und zwei Gegenwinkel: die vierte Seite, die fehlenden Winkel und den Inhalt zu bestimmen. Gegeben $a = 30$, $b = 13$, $c = 15$, $\measuredangle (a, b) = 112^0\ 37{,}2'$, $\measuredangle (c, d) = 53^0\ 7{,}8'$.

29. Von einem Viereck gegeben drei Seiten und die beiden der in ihrer Aufeinanderfolge ersten von ihnen anliegenden Winkel: $a = 29$, $b = 23$, $c = 29$, $(a, d) = 149^0\ 51{,}8'$, $(a, b) = 46^0\ 23{,}8'$: Forderung wie in Aufg. 28.

30. (Zum Anschluss). Von einem Fünfeck gegeben vier Seiten $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $(a,b) = \alpha = 85^0\ 16{,}5'$, $(b,c) = \beta = 132^0\ 9{,}8'$, $(c, d) = \gamma = 150^0\ 17{,}6'$: die fünfte Seite e und den Inhalt zu berechnen.

c. Figuren im und am Kreise.

31. Einem Kreise mit dem Radius $r = 3$ ist ein Dreieck eingezeichnet mit den Seiten 4 und 5: wie gross sind die dritte Seite, die ihr anliegenden Winkel und der Inhalt des Dreiecks?

b. Gegeben $r = 7$, $b = 11{,}372$, $c = 13{,}792$.

32. Einem Kreise mit dem Radius r ist ein Dreieck eingeschrieben, von welchem eine Seite und ein ihr anliegender Winkel gegeben sind: die fehlenden Seiten und Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

Gegeben **a.** $r = 10$, $a = 15$, $\beta = 75^0$.
b. $r = 18$, $a = 33{,}83$, $\beta = 26^0\,23{,}3'$.

33. Von einem Dreieck gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel: um wieviel ist der Inhalt desselben kleiner als der des umschriebenen Kreises?

Gegeben $a = 2{,}295$, $\beta = 64^0\,51{,}7'$, $\gamma = 67^0\,22{,}8'$.

34. Einem Kreise mit dem Radius ϱ ist ein Dreieck umgeschrieben, von welchem eine Seite c und ein ihr anliegender Winkel α gegeben sind: den anderen anliegenden Winkel β zu bestimmen. Gegeben $\varrho = 5$, $c = 19$, $\alpha = 59^0$.

35. Den Radius zu berechnen des inneren Berührungskreises für ein Dreieck, von welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Gegeben $b = 13$, $c = 40$, $\alpha = 67^0\,22{,}8'$.

36. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises sind unter dem Winkel $\alpha = 53^0\,7{,}8'$ eine Tangente $c = 15$ und eine Secante, deren äusserer Abschnitt $b = 4$ ist, gezogen: den Radius zu berechnen.

37. Wie Aufg. **36**; jedoch ist statt ihres äusseren Abschnittes die ganze Secante gleich 7,5 gegeben, $\alpha = 30^0\,8{,}2'$, $c = 2{,}9$.

38. Durch einen Kreis sind von einem Punkte ausserhalb unter dem Winkel $\alpha = 9^0\,31{,}6'$ zwei Secanten von der Länge 15 und 14,5 gezogen und zwar so, dass der äussere Abschnitt der ersteren gleich 13,6 ist: den Radius des Kreises zu berechnen.

39. Zwei Sehnen schneiden sich innerhalb eines Kreises unter dem Winkel 60^0, so dass die Abschnitte der einen gleich 2 und 3 sind und der eine Abschnitt der andern gleich 1: wie gross ist der Radius des Kreises?

40. Von einem Viereck im Kreise gegeben die vier Seiten a, b, c, d: den Radius des umschriebenen Kreises zu bestimmen. (Vergl. Aufg. 24.)

Gegeben $a = 12$, $b = 13$, $c = 14$, $d = 15$.

41. Dem Viereck im Kreise, dessen auf einander folgende Seiten gleich 6, 5, 8, 9 gegeben sind, lässt sich zugleich ein Kreis einschreiben: wie gross sind der Inhalt des Vierecks, der des um- und der des eingeschriebenen Kreises?

42. Die den auf einander folgenden Seiten a, b, c, d eines Vierecks im Kreise zugehörigen Centriwinkel seien bezüglich 2α, 2β, 2γ, 2δ gegeben: den Radius des Kreises, die übrigen Seiten und den Inhalt des Vierecks zu bestimmen, wenn die Seite a gegeben ist. (s. § 29, Aufg. 23.)

43. Drei Kreise, deren Radien gleich 3, 4, 5 gegeben sind, berühren sich zu zwei von Aussen: den Inhalt zu berechnen des durch die Kreisbogen begrenzten dreieckigen Flächenstückes.

44. Zwei Kreise mit den Radien 1 und 2, welche sich von Aussen berühren, werden von einem dritten mit dem Radius 4 umhüllt: wie gross ist das durch die drei kleinsten Bogen der drei Kreise begrenzte Flächenstück?

45. Einem Winkel $\alpha = 24^0\,6{,}8'$ sind zwei Kreise eingeschrieben mit den Radien $\varrho = 5$ und $\varrho_1 = 12$: wie gross ist die Centrale und die gemeinschaftliche innere Tangente der Kreise?

46. Einem Kreisausschnitt mit dem Radius $r = 5$ und dem Centriwinkel $\alpha = 7^0\,8{,}9'$ ist ein Kreis eingezeichnet: wie gross ist der Radius desselben?

47. (Anschl.) Die analoge Aufgabe, nur soll an Stelle eines einzigen eingezeichneten Kreises eine ganze Reihe von Kreisen treten, welche sich auf einander folgend und die Radien des gegebenen Ausschnittes berühren: die Summe von 10 dieser Kreise und aller Kreise zu bestimmen.

48. Die Radien r eines Kreisausschnittes mit dem Centriwinkel 2γ sind über die Peripherie hinaus verlängert und der Kreis gezeichnet, welcher diese Verlängerungen und den Kreis von Aussen berührt: den Radius dieses Kreises zu berechnen.

d. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

49. Die Höhe eines Thurmes AB zu bestimmen, wenn die Standlinie $AC = d$ unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt ist und C höher als der Fusspunkt A liegt. Gegeben $d = 183$m, der Elevationswinkel der Spitze $\gamma = 12^0\,54'$, $\delta = 11^0\,22'$.

50. (Anschl.) Wie Aufg. 49; jedoch soll der Punkt C tiefer als der Fuss A des Thurmes liegen.

Gegeben $d = 38{,}2$m, $\gamma = 65^0\,42{,}3'$, $\delta = 11^0\,34{,}5'$.

51. Die Höhe eines Thurmes zu bestimmen, dessen Spitze B senkrecht über dem Fusse A liegt, wenn die Standlinie $CD = d$

horizontal und in derselben Vertikalebene mit AB angenommen werden kann, aber nicht bis zum Fusse reicht.

Gegeb.: **a.** $d = 42{,}3\text{m}$, $\gamma = 12^0\, 18'$, $\delta = 14^0\, 7{,}5'$. } $\gamma = BCA$,
b. $d = 17\text{m}$, $\gamma = 54^0\, 17'$, $\delta = 67^0\, 3{,}4'$. } $\delta = BDA$.

52. (Anschl.) Die Standlinie $CD = d$ liegt nur noch mit AB in derselben Vertikalebene und zwar C in derselben Horizontalebene mit dem Fusse A. Gegeben $d = 80\text{m}$, Elevation der Spitze B in C: $\gamma = 34^0\, 25'$, in D: $\delta = 78^0\, 41'$, Elevation der Standlinie d, $DCA = \varepsilon = 8^0\, 55'$.

53. (Anschl.) Die Station C befinde sich in der Höhe $d = 117\text{m}$ über der Horizontalebene des Fusses A: der Depressionswinkel des Fusses A sei $\delta = 27^0\, 26'$ und der der Spitze B des Thurmes $\varepsilon = 17^0\, 16'$.

54. Die Entfernung der Spitzen A und B zweier Berge zu bestimmen, deren Erhebungen h und h_1 über der durch den Beobachtungspunkt C gelegten Horizontalebene man kennt, wenn man in C die Höhenwinkel α und β von A und B beobachtet und die Punkte A, B und C in derselben Vertikalebene liegen, und zwar C zwischen h und h_1.

Gegeben $h_1 = 123\text{m}$, $h_2 = 231\text{m}$, $\alpha = 24^0\, 56'$, $\beta = 12^0\, 10'$.

55. Die Erhebungen zweier Punkte A und B über der Horizontalebene und ihre Entfernung zu bestimmen, wenn man in dieser zwischen A und B und in derselben Vertikalebene mit AB die beiden Beobachtungspunkte C und D anzunehmen vermag.

Gegeben $CD = 45{,}63\text{m}$, die Höhenwinkel von A in C und D bezüglich 24^0 und $16^0\, 18{,}4'$ und die Höhenwinkel von B in C und D bezüglich 14^0 und $22^0\, 18{,}4'$.

56. Die Höhe AB zu bestimmen, wenn die Spitze B von den Endpunkten C und D der horizontalen, mit AB in derselben Vertikalebene liegenden Standlinie d bezüglich unter den Elevationswinkeln γ und δ, der Fusspunkt A von C aus unter dem Elevationswinkel ε erscheint: wie gross ist der Elevationswinkel θ für den Punkt A in D?

---

57. Den Abstand zweier Punkte A und B derselben Ebene (auf dem Felde) zu ermitteln, von denen nur der erstere zugänglich ist. Man misst die Entfernung eines seitwärts gelegenen Punktes von A, $AC = 154{,}7\text{m}$ und die Winkel $BAC = 47^0\, 58'$, $BCA = 82^0\, 2'$.

58. Die Breite eines Flusses zu bestimmen, dessen Ufer unzugänglich, aber durch Punkte A und B, nach denen hin man visiren kann, markirt sind. Man nimmt in der Ver-

längerung von AB den Punkt C und seitwärts D an und misst $CD = d = 43{,}5$m, $ADC = \delta_1 = 54^0\,12{,}3'$, $BDC = \delta_2 = 37^0\,43{,}8'$, $BCD = \gamma = 110^0$.

59. Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, hat man parallel der Richtung desselben und in der Entfernung d vom diesseitigen Ufer die Standlinie $AB = c$ angenommen, von deren Endpunkten aus ein Punkt C auf dem entgegengesetzten Ufer beobachtet werden kann.

Gegeben $d = 12$m, $c = 35$m, $CAB = 46^0\,8{,}2'$, $CBA = 64^0\,2{,}8'$.

60. Die Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, welche für einander unzugänglich und unsichtbar sind, jedoch von einem seitwärts gelegenen Punkte C erreicht werden können.

Gegeben $AC = 400$m, $BC = 300$m, $ACB = 50^0$.

61. Die Entfernung zweier unzugänglichen, jedoch visirbaren Punkte A und B auf dem Felde zu bestimmen. Gemessen die Standlinie CD und die Winkel, unter denen A und B von C und D aus erscheinen.

Gegeben: a. $CD = 300$m, $ACD = 90^0$, $BCD = 44^0\,24'$, $ADC = 45^0$, $BDC = 120^0\,16'$.

b. $CD = 84$m, $ACD = 59^0\,40'$, $BCD = 45^0\,21{,}3'$, $ADC = 30^0\,12{,}2'$, $BBC = 72^0\,19{,}7'$.

62. Wie Aufg. **61**; jedoch sollen die Beobachtungspunkte C und B auf entgegengesetzten Seiten von AB liegen.

Gegeben $CD = 50$m, $ACD = 117^0\,52'$, $BCD = 39^0\,37'$, $ADC = 52^0\,3'$, $BDC = 111^0$.

63. Die Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, welche für einander unzugänglich und unsichtbar sind, aber von zwei seitwärts gelegenen Stationen C und D erreicht werden können.

Gemessen: a. $CD = 80$m, $AD = 100$m, $AC = 60$m, $BC = 170$m, $BD = 150$m.

b. $CD = 51{,}2$m, $AD = 48{,}6$m, $AC = 21$m, $BC = 51{,}2$m, $BD = 30{,}8$m.

64. Man kennt die Entfernung zweier unzugänglichen, jedoch visirbaren Punkte A und B und die Winkel der Visirlinien nach ihnen hin von zwei seitwärts gelegenen Punkten C und D aus: die Entfernung dieser Punkte zu bestimmen.

Gegeben $AB = 54{,}321$m, $BCD = 59^0\,13{,}2'$, $ACD = 40^0 47'$, $ADC = 72^0\,15'$, $BDC = 38^0\,17{,}5'$.

65. Die Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, für deren einen man die Entfernung nach dem seitwärts gelegenen Punkte C kennt, von dem aus jedoch der andere Punkt unsichtbar ist. Gegeben $AC = 59{,}197$m, $CD = 36$m, $ACD = 120^0 19'$, $ADC = 37^0 48'$, $CDB = 65^0 29'$.

66. Die gegenseitigen Entfernungen dreier Punkte A, B, C zu bestimmen, wenn in der Verlängerung CA über A hinaus der Punkt D, in der Verlängerung von CB über B hinaus der Punkt E als Stationen gegeben sind, und zwar $DE = 12{,}312$, $ADB = 35^0$, $BDE = 54^0$, $AEB = 25^0$, $AED = 60^0$.

67. Von drei Punkten einer geraden Linie D, E, F, deren gegenseitige Entfernungen bekannt sind, beobachtet man drei Punkte der Ebene A, B, C, deren Verbindungslinien verlängert durch D, E, F gehen: die gegenseitige Entfernung der Punkte A, B, C zu bestimmen. Es gehe BC durch D, CA durch E, AB durch F und sei gegeben $DE = 5$, $EF = 7$, $BDE = \delta = 25^0$, $CEF = \varepsilon = 105^0$, $AFD = \theta = 35^0$. (s. § 33, Aufg. 42.)

e. Aufgaben über Projektionen.

68. Die Projektionen einer begrenzten geraden Linie auf zwei einander senkrecht durchschneidende gerade Linien L_1 und L_2 sind gleich a_1 und a_2 gegeben: die Länge a der Linie und ihre Winkel α_1 und α_2 mit L_1 und L_2 zu bestimmen.

69. (Anschl.) Man kennt die Projektionen der Seiten b und c des Dreiecks ABC auf zwei einander senkrecht durchschneidende Linien, bezüglich gleich b_1, b_2 und c_1, c_2: den eingeschlossenen Winkel des Dreiecks zu bestimmen.

70. Man kennt die Projektionen zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks auf eine gerade Linie L, wie gross sind die Seiten und ihre Winkel mit L?

71. Gegeben die Projektionen zweier Seiten eines Quadrates auf eine gerade Linie L, gleich b und c, wie gross die Seiten und der Winkel der ersteren mit L?

72. Gegeben die Projektionen zweier Seiten a und b eines Dreiecks auf eine gerade Linie L und deren Winkel mit L: die Länge der dritten Seite und ihren Winkel mit L zu bestimmen. (Zwei Fälle).

Gegeben die Projektionen $a_1 = 15$, $b_1 = 12$, $(a, L) = 24^0 36'$, $(b, L) = 36^0 24'$.

73. (Anschl.) **a.** Die Linie L, auf welche die Projektionen a_1 und b_1 der Seiten a und b des Dreiecks gebildet sind, sei die Halbirungslinie des Winkels γ. **b.** Die Linie L sei die Halbirungslinie des Aussenwinkels von γ: — Wie ist aus a_1, b_1 und γ die Seite c zu bestimmen?

74. Welche Beziehung findet zwischen den Seiten eines Dreiecks a, b, c und ihren Winkeln mit einer beliebigen Geraden L statt?

75. Welches ist die Beziehung zwischen den Seiten a, b, c . . n eines beliebigen n-Ecks und ihren Winkeln mit einer Geraden L?

76. Der eine Schenkel AB des Winkels BAC ist auf den anderen AC durch das Loth $BC_1 = l_1$ projicirt, ferner AC_1 auf AB durch das Loth $C_1B_1 = m_1$, dann wieder AB_1 auf AC durch das Loth $B_1C_2 = l_2$, AC_2 auf AB durch das Loth $C_2B_2 = m_2$ u. s. w. Wie gross ist **a.** die Summe aller Lothe l? **b.** aller Lothe m? **c.** aller Projektionen auf AC? **d.** aller Projektionen, AB mit eingeschlossen, auf AB? Gegeben $AB = c = 5$, $BAC = \alpha = 15^0\,26{,}4'$. (Geometrische Darstellung der Resultate).

77. Der Mittelpunkt M des regelmässigen n-Ecks $ABCD$ . . . . ist mit den Ecken verbunden und die Verbindungslinie MA durch das Loth $AB_1 = l_1$ auf MB projicirt, ferner MB_1 auf MC durch das Loth $B_1C_1 = l_2$, MC_1 auf MD durch das Loth $C_1D_1 = l_3$ u. s. w. Diese Lothe l und ihre Summe, sowie die Linien MA, MB_1, MC_1, MD_1, . . . und ihre Summe darzustellen, wenn $n = 20$ und $MA = r$ gegeben sind?

78. Die auf einander folgenden Seiten AB, BC, CD, . . . des regelmässigen n-Ecks $ABCD$ . . . sind auf den Durchmesser AM projicirt, wie gross sind die Projektionen AB_1, B_1C_1, C_1D_1, . . . und die Projektionslothe BB_1, CC_1, DD_1, . . . , sowie deren Summe, wenn $AB = a$ und die zu den Seiten gehörigen halben Centriwinkel gleich γ gegeben sind.

79. (Anschl.) Wie Aufg. 78; jedoch sollen die sämmtlichen Seiten des Vielecks $ABCD$ . . . auf die Seite AB selbst projicirt werden.

80. Ueber dem Durchmesser eines Kreises sind gleiche Sehnen in einen Halbkreis eingetragen, so dass ein halbes

regelmässiges Vieleck entsteht, die Ecken desselben sind mit dem einen Endpunkte des Durchmessers verbunden und die Verbindungslinien auf den Durchmesser projicirt: wie gross sind diese Projektionen und ihre Summe? Gegeben der Radius r des Kreises und der zu einer jeden Sehne gehörige halbe Centriwinkel γ, wo $\gamma = \frac{180^0}{n}$ und $n = 2m$ ist.

Entwickelungsaufgaben.

Dreiecksaufgaben.

§ 20. Auflösung von Dreiecken, zu deren Bestimmung zwei Winkel gegeben sind.

(Vergl. § 16, Aufg. 11 und 13, § 19, Aufg. 1 — 5).

a. Rechtwinklige Dreiecke.

Aufg. **1 — 15.** Von einem rechtwinkligen Dreieck gegeben die Winkel und

1. Die Summe der beiden Katheten, $a + b$.
 a. Gegeben $a + b = 19$, $\alpha = 53^0\ 42{,}5'$.
 b. „ $a + b = 10$, $\alpha = 37^0\ 48{,}5'$.

2. Die Differenz der beiden Katheten, $a - b$.
 a. Gegeben $a - b = 7$, $\alpha = 65^0\ 43{,}2'$.
 b. „ $a - b = 4$, $\beta = 28^0\ 16'$.
 c. „ $a - b = 6$, $\beta = 44^0 19{,}2'$.

3. Die Summe der Hypotenuse und einer Kathete, $c + a$.
 Gegeben $c + a = 1$, $\alpha = 75^0\ 31'$.

4. Die Differenz der Hypotenuse und einer Kathete, $c - a$.
 Gegeben $c - a = 1$, $\alpha = 13^0\ 57'$.

5. Der Umfang, $a + b + c = 2s$.
 a. Gegeben $2s = 17$, $\alpha = 36^0\ 49'$.
 b. „ $2s = 20$, $\alpha = 68^0\ 25'$.

6. Der Ueberschuss der Summe der beiden Katheten über die Hypotenuse, $a+b-c=2(s-c)$, die Hypotenuse zu bestimmen. Gegeben $2(s-c)=2$, $\alpha=34^0\,19'$.

7. Der Ueberschuss der Hypotenuse über die Differenz der beiden Katheten, $c-a+b=2(s-a)$, die Hypotenuse zu bestimmen. Gegeben $2(s-a)=1{,}7$, $\alpha=17^0\,17'$.

8. Die Differenz der Quadrate der beiden Katheten, $a^2-b^2=d^2$, die Hypotenuse zu bestimmen.
Gegeben $d^2=1{,}0305$, $\alpha=50^0\,30{,}1'$.

9. Die Summe der Hypotenuse und der doppelten zugehörigen Höhe, $c+2h=d$, die Hypotenuse zu bestimmen.

10. Die Summe einer Kathete und der Höhe auf die Hypotenuse $a+h=d$, die zweite Kathete b zu bestimmen.

11. Die Differenz einer Kathete und der Höhe auf die Hypotenuse $a-h=d$, die zweite Kathete b zu bestimmen.

12. Die Halbirungslinie des Winkels BAC, t_a, die Gegenkathete a zu bestimmen.

13. Die Halbirungslinie des rechten Winkels, t_c, gesucht die drei Seiten.

14. Gegeben $ab-2h^2=d^2$, gesucht die Hypotenuse.

15. Gegeben $c^2-2ab=d^2$, gesucht die Hypotenuse.

b. Schiefwinklige Dreiecke.

16. Von einem schiefwinkligen Dreieck gegeben die Winkel und die Summe zweier Seiten, $a+b$.

a. $a+b=1$, $\alpha=54^0$, $\beta=32^0\,17'$.
b. $a+b=12$, $\alpha=34^0$, $\beta=43^0\,17{,}6'$.

17. Die Differenz zweier Seiten, $a-b$.

a. $a-b=1$, $\alpha=45^0\,34'$, $\beta=34^0\,45'$.
b. $a-b=5{,}785$, $\alpha=96^0\,5{,}2'$, $\beta=57^0\,18{,}7'$.

18. Der Umfang, $2s$.

a. $2s=18$, $\alpha=34^0$, $\beta=28^0\,39{,}4'$.
b. $2s=21{,}87$, $\alpha=92^0\,11{,}3$, $\beta=50^0\,0{,}5'$.
c. $2s=23$, $\alpha=34^0\,5'$, $\beta=67^0\,8{,}9'$: gesucht der Inhalt.

19. Der Ueberschuss der Summe zweier Seiten über die dritte, $a + b - c = 2(s - c)$.

a. $2(s - c) = 1$, $\alpha = 25^0$, $\beta = 120^0$.

b. $2(s - c) = 5$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 71^0\,49'$: gesucht der Inhalt.

20. Gegeben $c = 2a + 1$, $\beta = 76^0$, $\gamma = 81^0\,40'$: die Seiten zu bestimmen.

21. Gegeben $3a + 2b = 14$, $\alpha = 22^0\,20'$, $\beta = 49^0\,27{,}5'$: die Seiten zu bestimmen.

22. Gegeben $2c = a + b + 8{,}4$, $\alpha = 68^0\,28'$, $\beta = 51^0\,36'$: die Seiten zu bestimmen.

23. **a.** Gegeben $fl = 100$, $\alpha = 76^0$, $\beta = 54^0\,32{,}1'$: die Seite a zu bestimmen.

b. Gegeben $fl = 12$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^0\,35{,}2'$: den Radius des inneren Berührungskreises zu bestimmen.

24. Gegeben die Mittellinie auf die Seite a

$$m_a = 5,\ \beta = 67^0,\ \gamma = 54^0\,3{,}2'.$$

25. Gegeben die Summe zweier Höhen, $h_a + h_b = 5$, $\alpha = 70^0$, $\beta = 80^0$: die dritte Seite c zu bestimmen.

25a. Gegeben die Differenz zweier Höhen $h_c - h_b = 5$, $\beta = 97^0$, $\gamma = 46^0$: die dritte Seite a zu bestimmen.

26. Gegeben das Produkt zweier Seiten $ab = d^2 = 1$, $\alpha = 12^0$, $\beta = 21^0$: die drei Seiten zu bestimmen.

27. Gegeben die Differenz der Quadrate zweier Seiten d^2: gesucht die dritte Seite c.

28. Die Summe der Quadrate zweier Seiten ist um d^2 grösser als das Quadrat der dritten Seite: den Inhalt und die dritte Seite zu bestimmen.

Gegeben $b^2 + c^2 - a^2 = d^2 = 12$, $\alpha = 35^0\,17'$, $\beta = 46^0\,38{,}5'$.

29. Gegeben die Differenz der durch die Höhe auf die Seite a auf dieser bestimmten Abschnitte gleich d: die Seite a zu bestimmen.

30. Gegeben die Summe der Projektionen der Seite a auf die beiden Seiten b und c gleich d: die Seite a zu bestimmen.

31. Gegeben die Summe der Projektionen der Seiten b und c auf einander gleich d: die Seite a zu bestimmen.

§ 21. Zusammenhang zwischen Bestimmungsstücken eines Dreiecks, von welchem die Winkel gegeben sind.

1. Gegeben eine Seite a: darzustellen

a. die drei Höhen h_a, h_b, h_c;
b. den Radius des umschriebenen Kreises r;
c. die Radien der vier Berührungskreise ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c;
d. die oberen Höhenabschnitte $k^1{}_a$, $k^1{}_b$, $k^1{}_c$;
e. die unteren Höhenabschnitte k_a, k_b, k_c;
f. den Inhalt fl;
g. den halben Umfang s;
h. die Seitenergänzungen $s - a$, $s - b$, $s - c$;
i. die Halbirungslinien der drei Winkel t_a, t_b, t_c;
k. die Verbindungslinien der Fusspunkte der drei Höhen a_1, b_1, c_1;
l. die Winkel des durch sie gebildeten Dreiecks α_1, β_1, γ_1. (Vergl. § 26, Aufg. 24).

2. Gegeben der Radius des umschriebenen Kreises r: darzustellen: (Vergl. Aufg. 1).
die Seite a, die Höhe h_a, deren Abschnitte $k^1{}_a$, k_a, die Radien ϱ und ϱ_a, den Inhalt fl, den halben Umfang s, die Seitenergänzung $s - a$.

3. Gegeben der Radius des inneren Berührungskreises ϱ: darzustellen b, h_b, fl, s, $s - b$, ϱ_b.

4. Gegeben der Radius des die Seite b von Aussen berührenden Berührungskreises ϱ_b: darzustellen b und c, r, fl, s, $s - a$, $s - b$, ϱ und ϱ_c.

5. Gegeben der Inhalt des Dreiecks fl: darzustellen c, r, ϱ, ϱ_c, s, $s - c$.

6. Gegeben der Umfang des Dreiecks $2s$: darzustellen a, r, ϱ, ϱ_a, fl, $s - a$.

7. Gegeben eine Seitenergänzung $s - a$: darzustellen a, b, r, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, s, $s - b$, fl.

8. Gegeben eine Höhe h_a: darzustellen a, c, fl, r, ϱ, ϱ_a, ϱ_c, s, $s - a$, $s - c$.

9. Gegeben die Summe zweier Seiten $b + c$: darzustellen a, b, r, $b - c$, s, $h_b + h_c$.

10. Gegeben die Differenz zweier Seiten $b - c$: darzustellen $b + c$, a, b, r.

11. Gegeben die Differenz der Quadrate zweier Seiten $b^2 - c^2 = d^2$: darzustellen a, $b + c$, $b - c$, fl.

12. Gegeben die Summe der Quadrate zweier Seiten $b^2 + c^2 = d^2$: darzustellen r.

13. Gegeben der Ueberschuss der Summe der Quadrate zweier Seiten über das Quadrat der dritten $b^2 + c^2 - a^2 = d^2$: darzustellen fl und r.

14. Gegeben die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels t_a: darzustellen b, a, r, h_a, ϱ.

15. Gegeben die Summe zweier Höhen $h_b + h_c = d$: darzustellen a, $b + c$, $h_b - h_c$.

16. Gegeben die Summe der reciproken Werthe zweier Seiten $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{e}$: darzustellen $\frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, r, ϱ.

17. Gegeben die Summe der Produkte zweier Seitenpaare $ab + ac = d^2$: darzustellen a, $b + c$, $ab - ac$, ab, ac, $b^2 - c^2$.

18. Gegeben die Summe der reciproken Werthe zweier Höhen $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{e}$: darzustellen h_a, b, ϱ, ϱ_a, $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_a}$.

19. Gegeben die Differenz der reciproken Werthe zweier Höhen $\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{e}$: darzustellen h_a, $\frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{\varrho_b}$.

20. Gegeben die Summe der reciproken Werthe der drei Höhen $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{e}$: darzustellen a, $s - a$, ϱ.

21. Gegeben die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe zweier Seiten $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{e^2}$: darzustellen h_a, a, fl.

22. Gegeben die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe zweier Höhen $\frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{e^2}$: darzustellen h_a und fl.

Aufg. 23—35. Gegeben die Winkel α, β, γ eines Dreiecks, darzustellen:

23. Das Verhältniss der Halbirungslinien der Innenwinkel zwischen Eckpunkt und Gegenseite.

24. Das Verhältniss der Abschnitte der Halbirungslinien der Innenwinkel.

25. Das Verhältniss der Seiten des Dreiecks, welches durch die Halbirungslinien der Aussenwinkel gebildet wird.

26. (Anschl.) Das Verhältniss der durch die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks auf diesen Seiten bestimmten Abschnitte.

27. Das Verhältniss der Seiten desjenigen Dreiecks, welches durch die Halbirungslinien zweier Innenwinkel und des dritten Aussenwinkels gebildet wird.

28. (Anschl.) Das Verhältniss der durch die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks auf diesen Seiten bestimmten Abschnitte.

29. Das Verhältniss der Dreiecke, welche durch die Verbindungslinien der Schnittpunkte der Halbirungslinien der Innenwinkel mit den Gegenseiten vom gegebenen Dreieck abgeschnitten werden.

30. Das Verhältniss der Radien der inneren und der äusseren Berührungskreise.

31. Das Verhältniss der Abschnitte der drei Höhen.

32. Das Verhältniss der Dreiecke, welche durch die oberen Höhenabschnitte und die Seiten gebildet werden.

33. Der vom Eckpunkt A aus gezogene Radius des umschriebenen Kreises wird nöthigenfalls bis zur Gegenseite verlängert: wie verhalten sich die Abschnitte dieser Seite und wie der Radius zu dem Abschnitt zwischen Mittelpunkt und Gegenseite?

34. Der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises (eines der äusseren Berührungskreise) ist mit den Ecken des Dreiecks verbunden: wie verhalten sich die entstehenden Dreiecke?

35. Wie verhalten sich die durch die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten des inneren Berührungskreises und der Seiten bis zu ihrer Durchschneidung entstehenden Dreiecke?

5*

§ 22. Construktion trigonometrischer Ausdrücke.

Bezeichnet sind durch a, b, c Linien von gegebener Länge, durch α, β, γ Winkel von gegebener Grösse.

a. Vermittelst des rechtwinkligen Dreiecks.

1. Welche geometrische Bedeutung haben die trigonometrischen Ausdrücke:

$$x = a \sin \alpha,\ y = a \cos \alpha,\ z = a \operatorname{tg} \alpha,\ u = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. (Anschl.) Ebenso die Ausdrücke:

$$x = \frac{a}{\sin \alpha},\ y = \frac{a}{\cos \alpha},\ z = \frac{a}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha},\ u = a \operatorname{tg} \alpha^2.$$

3. (Anschl.) Zu construiren die Ausdrücke:

$$x = a \sin \alpha^2,\ y = a \cos \alpha^2,\ z = \frac{a}{\sin \alpha^2},\ u = \frac{a \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

4. Zu construiren das Resultat der Summation der unendlichen geometrischen Reihe:
$a + a \sin \alpha^2 + a \sin \alpha^4 + \ldots$ in inf. (Vergl. § 19, Aufg. 76).

5. (Anschl.) Wie ist geometrisch die Summe darzustellen der geometrischen Reihe $a + a \cos \alpha + a \cos \alpha^2 + \ldots$ in inf.?

6. (Anschl.) Ebenso der geometrischen Reihe:

$$a - a \cos \alpha + a \cos \alpha^2 - \ldots \text{ in inf.}$$

7. Geometrisch darzustellen die auf einanderfolgenden Glieder und die Summe der geometrischen Reihe:

$$a + a \operatorname{tg} \alpha^2 + a \operatorname{tg} \alpha^4 + \ldots \text{in inf.},\ a < 45^\circ.$$

8. (Anschl.) Ebenso der geometrischen Reihe:

$$a + a \operatorname{ctg} \alpha^2 + a \operatorname{ctg} \alpha^4 + \ldots \text{ in inf.},\ \alpha > 45^\circ.$$

9. Graphische Darstellung der Summe der dreigliedrigen Reihe $\frac{a}{\cos \alpha^2} + a + a \cos \alpha^2$.

10. (Anschl.) Ebenso der fünfgliedrigen Reihe:

$$a + \frac{a}{\sin \alpha^2} + \frac{a}{\sin \alpha^4} + \frac{a}{\sin \alpha^6} + \frac{a}{\sin \alpha^8}.$$

Aufg. 11 — 17. Einen Winkel zu construiren aus seinem Funktionalwerthe, nämlich:

11. $\sin x = \frac{a}{b}$, $\cos y = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} z = \frac{a}{b}$.

12. $\sin x = 1 - \frac{a}{b}$, $\cos y = 1 - \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} z = 1 + \frac{a}{b}$.

13. $\sin x^2 = \frac{a}{b}$, $\cos y^2 = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} z^2 = \frac{a}{b}$.

14. $\sin x = \frac{a^2}{b^2}$, $\operatorname{ctg} y = \frac{a^2}{b^2}$, $\cos z = 1 - \frac{a^2}{b^2}$.

15. $\sin x = \cos\alpha$, $\cos y = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg} z = \sin\gamma$.

16. $\sin x = \sin\alpha \cdot \sin\beta$, $\cos y = \sin\alpha \cdot \cos\beta$, $\operatorname{tg} z = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

17. $\sin x = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\cos y = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\operatorname{tg} z = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

18. $x = a\cos\alpha \cdot \cos\beta$, $y = a\sin\alpha \cdot \cos\beta$, $z = a\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

19. $x = a\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$, $y = a\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$, $z = \frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}$.

20. $x = a\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$, $y = \frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\beta}$, $z = a\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\beta$.

b. Vermittelst des schiefwinkligen Dreiecks.

Einen Winkel zu construiren aus seinem Funktionalwerth, nämlich:

21. $\sin x = \frac{a\sin\beta}{b}$, $\sin y = \frac{a\cos\beta}{b}$, $\cos z = \frac{a\cos\beta}{b}$.

22 — 25. Zu construiren:

22. $x = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $y = \frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$, $z = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}$. (Vergl. Aufgabe 19).

23. $x = \frac{a\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$, $y = \frac{a\sin\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha}$, $z = \frac{a\cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha}$,
wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

24. $x = \frac{a\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$, $y = \frac{a\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$, $z = \frac{a\cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha}$,
wenn $\alpha + \beta + \gamma = R$.

25. (Anschl.) Unter gleicher Bedingung zu construiren:
$x = \frac{a\cos\beta \cdot \cos\gamma}{\cos\alpha}$, $y = \frac{a\cos\beta \cdot \sin\gamma}{\cos\alpha}$, $z = \frac{a\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos\alpha}$.

26. (Anschl.) Welche Bedeutung im Dreieck ABC haben die Ausdrücke:

$$x = \frac{a}{\sin\alpha},\ y = a\cos\alpha,\ z = a\operatorname{ctg}\alpha?$$

27. Ebenso $x = a\sin\alpha,\ y = \frac{a}{\cos\alpha},\ z = a\operatorname{tg}\alpha$?

28. Zu construiren:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{b},\ \operatorname{tg} y = \frac{a}{b\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{ctg} z = \frac{a\operatorname{ctg}\beta}{b}.$$

29. Darzustellen $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos\gamma}$.

30. Zu construiren den Winkel aus dem Werthe des Cosinus: $\cos x = \frac{a^2 + b^2}{2ac},\ \cos y = \frac{a^2 - b^2}{2ac}$.

31—37. Zu construiren den Winkel x:

31. $\sin x = \sin\alpha + \sin\beta$.

32. Ebenso $\cos x = \sin\alpha - \sin\beta$.

33. $\cos x = \cos\alpha + \cos\beta$.

34. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

35. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta$, wo $90° > \beta > \alpha$.

35a. (Anschl.) $\operatorname{tg} x = \frac{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

36. $\operatorname{tg} x = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$.

37. $\operatorname{tg} x = \frac{b\sin\gamma}{a + b\cos\gamma}$.

38—43. Den Winkel x geometrisch darzustellen, welcher entspricht der Gleichung:

38. $\sin x + \cos x = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha > 45°$.

39. $\sin x - \cos x = \operatorname{tg}\alpha$.

40. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\delta$.

41. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\delta$.

42. $a\sin x + b\cos x = d$.

43. $a\sin x - b\cos x = d$.

44—55. Die Winkel x und y zu construiren, welche bestimmt sind durch die Gleichungen:

44. $x + y = \delta$, $\sin x : \sin y = a : b$.

45. $x - y = \delta$, $\sin x : \sin y = a : b$.

46. $x + y = \delta$, $\cos x : \cos y = a : b$.

47. $x - y = \delta$, $\cos x : \cos y = a : b$.

48. $x + y = \delta$, $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = a : b$.

49. $x - y = \delta$, $\operatorname{ctg} x : \operatorname{ctg} y = a : b$.

50. $x + y = \delta$, $a \cos x + b \cos y = d$.
51. $x + y = \delta$, $a \sin x + b \sin y = d$.
52. $x + y = \delta$, $a \cos x - b \cos y = d$.
53. $x + y = \delta$, $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} \delta$.
54. $x + y = \delta$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$.
55. $x - y = \delta$, $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} \delta$.

56. Construktion der Unbekannten aus den beiden Gleichungen:
$x \cdot \sin(\alpha + u) = a$,
$x \cdot \sin(\beta - u) = b$. (Vergl. § 11, Aufg. 65).

57. (Anschl.) Ebenso aus den Gleichungen:
$x \cdot \sin(\alpha + u) = a$,
$x \cdot \sin(\beta + u) = b$. (Vergl. § 11, Aufg. 63).

58. Ebenso aus den Gleichungen:
$x \cdot \operatorname{tg}(\alpha + u) = a$,
$x \cdot \operatorname{tg}(\beta + u) = b$.

59. Den Winkel u zu construiren aus der Relation:

$$\sin u = \frac{(b^2 - c^2) \cdot \sin \alpha}{a^2}.$$

60. Durch den Eckpunkt A des Dreiecks ABC eine gerade Linie zu ziehen, so dass durch die auf sie von den beiden anderen Eckpunkten gefällten Lothe BB_1 und CC_1 die gleichen Dreiecke ABB_1 und ACC_1 abgeschnitten werden.

§ 23. Auflösung und Construktion von Dreiecken, von welchen eine Seite und die Summe oder Differenz der anliegenden Winkel gegeben sind.

Gegeben:

1. a, α, $b + c$.
 a. $a = 8{,}2$, $\alpha = 85° \, 14{,}7'$, $b + c = 10{,}84$.
 b. $a = 12{,}6$, $\alpha = 75° \, 45'$, $b + c = 19{,}8$.

2. a, $\beta - \gamma$, $b + c$.
 a. $a = 7$, $b + c = 15$, $\beta - \gamma = 12°$.
 b. $a = 136$, $b + c = 170$, $\beta - \gamma = 96° \, 44'$.

3. a, α, $b - c$.
 a. $a = 2$, $b - c = 1$, $\alpha = 70°$.
 b. $a = 5$, $b - c = 2$, $\alpha = 57°$.

4. a, $\beta - \gamma$, $b - c$.
 a. $a = 5$, $b - c = 3$, $\beta - \gamma = 34° \, 19'$.
 b. $a = 5{,}6$, $b - c = 1{,}04$, $\beta - \gamma = 6° \, 17'$.

Gegeben:

5. a, α oder $\beta - \gamma$, $b^2 - c^2$.
a. $a = 10$, $\alpha = 70°45{,}3'$, $b^2 - c^2 = 17$.
b. $a = 7$, $\beta - \gamma = 7°37{,}1'$, $b^2 - c^2 = 8$.

6. a, α oder $\beta - \gamma$, h_a.
a. $a = 5$, $\alpha = 46°$, $h_a = 4$. (Determination.)
b. $a = 4$, $\beta - \gamma = 21°27{,}6'$, $h_a = 5$.

7. a, α oder $\beta - \gamma$, fl.
a. $a = 4$, $\alpha = 14°15'$, $fl = 24$.
b. $a = 38$, $\beta - \gamma = 78°11{,}2$, $fl = 456$.

8. a, α, bc.
$a = 3{,}094$, $bc = 12$, $\alpha = 47°58'$.

9. a, α oder $\beta - \gamma$, $b^2 + c^2$.
a. $a = 4$, $\alpha = 35°36'$ $b^2 + c^2 = 56$.
b. $a = 3$, $\beta - \gamma = 27°27'$, $b^2 + c^2 = 25$.

10. a, α oder $\beta - \gamma$, $h_b + h_c = d$.
a. $a = 5$, $\alpha = 58°$, $d = 8$.
b. $a = 5$, $\beta - \gamma = 48°31{,}4'$, $d = 8$.

11. a, α oder $\gamma - \beta$, $h_b - h_c = d$.
a. $a = 8$, $\alpha = 54°19'$, $d = 1$.
b. $a = 5$, $\gamma - \beta = 30°35'$, $d = 1$.

12. a, α, $b : c$.
$a = 5$, $\alpha = 40°8{,}6'$, $b : c = 2 : 3$.

13. a, α oder $\beta - \gamma$, $\cos\beta : \cos\gamma = \lambda : \mu$.

14. a, α, ϱ.
a. $a = 74$, $\alpha = 53°7{,}8'$, $\varrho = 11$. (Vgl. § 36, Aufg. 17.)
b. $a = 16$, $\alpha = 28°$, $\varrho = 2$.

15. a, α, ϱ_a. (Vgl. § 36, Aufg. 18.)
$a = 5{,}5$, $\alpha = 57°$, $\varrho_a = 4$.

16. a, α, ϱ_b.
$a = 9{,}5$, $\alpha = 73°$, $\varrho_b = 5$.

17. a, α, m_a.
$a = 49{,}1$, $\alpha = 36°7{,}7'$, $m_a = 75$.

18. a, α, $\operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma$.

19. a, $\beta - \gamma$, $\operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma$.

20. a, α und die Summe d der Projektionen von a auf die Seiten b und c.

21. a, $\beta - \gamma$ und die Differenz d^2 der Quadrate der Projektionen von a auf die Seiten b und c.

Gegeben:

22. a, α und der Winkel δ, welchen die Mittellinie m_a mit der Seite a bildet.

23. a, α, t_a ($a = 5$, $\alpha = 53°$, $t_a = 3$).
(Zum Anschluss.) Von den gegebenen Stücken a und α ist das eine durch r ersetzt.

24. a, r, β.
a. $a = 6$, $r = 5$, $\beta = 58° 9'$
b. $\alpha = 75° 45'$, $r = 6{,}5$, $c = 12$
} gesucht ϱ und fl.

25. $b + c$, α, r oder r, $\beta - \gamma$, $b + c$.
$b + c = 225$, $\alpha = 7° 37{,}7'$, $r = 56{,}5$.

26. $b - c$, r, α oder r, $\beta - \gamma$, $b - c$.
$b - c = 1$, $r = 5$, $\alpha = 43° 21'$.

27. r, α, $b^2 - c^2$ oder r, $\beta - \gamma$, $b^2 - c^2$.

Gegeben:

28. r, α, $h_b + h_c = d$.

29. r, $\beta - \gamma$, $h_c - h_b = d$.

30. r, α, h_a.

31. r, α, fl.

32. r, $\beta - \gamma$, $b : c = \lambda : \mu$.

33. r, α, ϱ.

34. r, a, ϱ_a.

35. r, α, $a + b + c = 2s$.

§ 24. Auflösung von Dreiecken, wenn unter den gegebenen Stücken ein Winkel oder die Differenz zweier Winkel vorkommt.

(Vergl. § 23).

Gegeben:

1. b, c, $\beta - \gamma$.

2. a, $b : c = \lambda : \mu$, β.

3. h_a, $b : c = \lambda : \mu$, α.

4. fl, $b : c = \lambda : \mu$, $\beta - \gamma$.

5. $a + b + c = 2s$, $b : c = \lambda : \mu$, α.

6. a, $b + c$, β.
$a = 1$, $b + c = 3$, $\beta = 57° 9'$.

7. a, $b - c$, β.
$a = 15{,}3$, $b - c = 3{,}875$, $\beta = 87° 14{,}8'$.

8. r, $b + c$, β oder r, $b - c$, β.

9. Durch die Halbirungslinie des Winkels A wird die Gegenseite BC in die Stücke $CA_1 = a_1$ und $BA_1 = a_2$ getheilt: die Halbirungslinie AA_1 und die Winkel β und γ zu berechnen, wenn α, a_1 und a_2 gegeben sind.

Gegeben: a. $a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $\alpha = 78° 9'$,
b. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\alpha = 70°$.

10. (Anschl.) Gegeben $a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $\gamma = 78° 9'$: die beiden anderen Winkel zu berechnen.

11. Durch die Halbirungslinie des Aussenwinkels A wird die Gegenseite in die Stücke $CA_2 = a_3$ und $BA_2 = a_4$ getheilt: die Halbirungslinie AA_2 und die übrigen Winkel des Dreiecks zu berechnen, wenn α, a_3 und a_4 gegeben sind.

Gegeben $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $\alpha = 78° 9'$.

Gegeben:

12. ϱ, α, $b + c$.
$\varrho = 2$, $\alpha = 65°$, $b + c = 30,14$.

13. ϱ, α, $a - b$.

14. ϱ, α, $a + b + c = 2s$.
$\varrho = 1$, $\alpha = 25°$, $s = 10,5$.

15. ϱ, α, fl.
$\varrho = 1$, $\alpha = 65°$, $fl = 13,5$.

Gegeben:

16. ϱ, α, h_a.

17. ϱ, β, a.
$\varrho = 4$, $\beta = 104° 45,5$, $b = 47,721$.

18. ϱ_a, β, a.

19. ϱ_a, α, b.

20. ϱ, β, h_a.

21. ϱ, γ, $a : b = \lambda : \mu$.

22. ϱ, α, ϱ_a.

23. ϱ, α, ϱ_b.

24. ϱ_b, α, ϱ_c.

25. ϱ_a, α, ϱ_b.

26. ϱ_a, β, r.

27. ϱ_a, β, $a + b + c = 2s$.

28. ϱ_a, β, fl.

29. $b + c$, t_a, α.
$b + c = 72$, $t_a = 24$, $\alpha = 93°$.

30. Gegeben $b - c$, α und die Halbirungslinie des Aussenwinkels A, $AA_2 = t_a'$.

Gegeben:

31. t_a, h_b, α.

32. $b + c$, h_b, α.

33. $b + c$, h_b, γ.

34. $b + c$, $h_c - h_b$, α.

35. $b - c$, $h_b + h_c$, α.

36. $a + b + c$, h_a, β.

37. $b + c - a$, h_a, γ.

38. α und $h : a = \lambda : \mu$. ($\alpha = 45°$, $\lambda : \mu = 4 : 5$.)

39. α und $h : r = \lambda : \mu$. ($\alpha = 54°$, $\lambda : \mu = 4 : 5$.)

40. $a + b + c$, h_a, α.

Gegeben:

41. $a + b - c$, h_a, α.

42. bc, h_a, α.

Gegeben:

43.*) $h_a = 6$, $b + c = 14$, $\alpha = 59° 29{,}4'$.

44.*) $h_a = 5$, $b - c = 1$, $\alpha = 54° 32{,}1'$.

45.*) $h_a = 1$, $h_b + h_c = 1{,}6$, $\alpha = 58°$.

46.*) $h_a = 10$, $h_b - h_c = 1$, $\alpha = 50°$.

47.*) $h_a = 6$, $b - c = d = 3{,}4811$, $\beta - \gamma = 61° 40'$.

48. a. $a + b + c = 2s = 42$, $fl = 84$, $\alpha = 56°$.
b. $s = 9$, $fl = 6$, $\alpha = 65°$.

49. $b + c - a = 2(s - a)$, fl, α.

50. $b + c = d$, fl, α.

51. $b - c = d$, fl, α.

52. $b^2 + c^2 = d^2$, fl, α.

53. $b^2 - c^2 = d^2$, fl, α.
$b^2 - c^2 = 1$, $fl = 2$, $\alpha = 21°$.

54. a, $b^2 - c^2 = d^2$, β.
$a = 2$, $b^2 - c^2 = 1$, $\beta = 50°$.

55. $a = 2$, $b^2 - c^2 = 1$, $\gamma = 40°$.

56. Der Fusspunkt des vom Eckpunkt A auf BC gefällten Lothes, h_a, sei A_1 und $BA_1 = c_1$, $CA_1 = b_1$ gesetzt: das Dreieck ABC aufzulösen, wenn gegeben sind:
b_1, c_1, α.

57. (Anschl.) b_1, c_1, $\beta - \gamma$.

58. (Anschl.) h_a, $b_1 - c_1 = d$, α.

59. (Anschl.) h_a, $b_1 - c_1 = d$, $\beta - \gamma$.

Gegeben:

60. h_a, m_a, α.
$h_a = 4$, $m_a = 4{,}1$, $\alpha = 41°$.

61. $b + c = d$, m_a, α.

62. $a + b$, $a + c$, α. (Vergl. § 27, Aufg. 21).

63. $a + b$, $c - b$, β.
$a + b = 3{,}234$, $c - b = 1{,}111$, $\beta = 31° 45'$.

64. Der Winkel A des Dreiecks ABC ist durch eine gerade Linie, welche die Gegenseite in die Stücke d und e theilt, in die entsprechenden Stücke δ und ε getheilt: das Dreieck aufzulösen. Gegeben $d = 7$, $e = 5$, $\delta = 52° 12'$, $\varepsilon = 27° 15'$.

---

*) Quadratische Probleme.

§ 25. Auflösung von Dreiecken, unter deren Bestimmungsstücken sich kein Winkel befindet.

Gegeben:

1. $a, h_b, b + c = d$.
$a = 25, h_b = 24, d = 103$.

2. $a, h_c, c - b = d$.
$a = 101, h_c = 20, d = 49$.

3. $a, h_b, b^2 + c^2$.

4. $a, h_c, b^2 - c^2$.

5. a, h_b, r.

6. a, h_c, ϱ.

7. a, h_b, m_b.

8. a, h_c, m_b.

9. a, h_b, t_b.

10. a, h_c, t_b.

11.*) a, h_a, m_a.

12. a, h_a, bc.
$a = 5, h_a = 6, bc = 43{,}21$.

13. a, h_a, r.

14. a, h_a, ϱ.
$a = 7, fl = 20, \varrho = 1$.

15. a, h_a, ϱ_a.

16. a, h_a, ϱ_b.

17. $a, h_a, b + c$.

18. $a, h_a, b - c$.

19. $a, h_a, b^2 + c^2$.

20. $a, h_a, b^2 - c^2$.

21. a, h_a, t_a.

---

22. a, b, m_a.

23. b, c, m_a.
$b = 2, c = 3, m_a = 2{,}1$.

24. b, c, t_a.
a. $b = 2, c = 3, t_a = 2{,}1$.
b. $b = 12, c = 17, t_a = 5$.

25. b, c, t'_a, wo t'_a die Halbirungslinie ist des Nebenwinkels von A bis zur Gegenseite.

26. $b, c, h_b + h_c$.

Gegeben:

27. $b, c, h_c - h_b$.

28. b, c, r.

29. Gegeben die Seiten b und c und die Summe der Projektionen der Seite a auf b und c gleich d.

30. Gegeben b, c und die Differenz d der Projektionen b_1 und c_1 der Seiten b und c auf a.

31. Gegeben b, c und das Verhältniss der Projektionen b_1 und c_1.

---

*) Die Stücke a und h_a in den Aufgaben 11—21 können ersetzt werden durch a und fl oder durch h_a und fl.

32. Gegeben b, c und das Verhältniss $\lambda : \mu$ der durch den verlängerten Radius AM des umschriebenen Kreises auf a bestimmten Abschnitte.

33. Gegeben b, c und das Verhältniss $\lambda : \mu$ der durch den Berührungspunkt des inneren Berührungskreises auf der dritten Seite bestimmten Abschnitte.

34. Wie Aufgabe 33, jedoch soll das Verhältniss der durch den Berührungspunkt des der Seite a zukommenden äusseren Berührungskreises auf a bestimmten Abschnitte gegeben sein.

Gegeben:

35. h_b, h_c, $b + c = d$*).

37. h_b, h_c, fl.

39. $h_b + h_c = d$, $b + c = e$, a.

41. h_a, $h_b + h_c = d$, $b + c = e$.

Gegeben:

36. h_b, h_c, $b^2 - c^2 = d^2$.

38. h_b, h_c, $b^2 + c^2 = d^2$.

40. $h_c - h_b = d$, $b - c = e$, a.

---

42. a, m_b, m_c.

43. a, m_a, $b + c = d$.

44. a, m_a, $b - c = d$.

45. m_b, m_c, $b^2 + c^2 = d^2$.

46. m_a, h_b, h_c.

47**). h_a, $b + c = d$, r.

48**). h_a, $b - c = d$, r.

49**). h_a, $b^2 + c^2 = d^2$, r.

50. h_a, $b : c = \lambda : \mu$, r.

---

51. h_a, $a + b + c = 2s$, ϱ.
$h_a = 2{,}4$, $s = 32$, $\varrho = 2{,}25$.

52. h_a, $b + c - a = 2\,(s - a)$, ϱ_a.

53. a, $b + c = d$, ϱ.

54. (Anschl.) a, $b + c = d$, fl.

55. a, $b - c = d$, ϱ.

56. a, $b - c = d$, ϱ_a.

57. a, $b + c = d$, ϱ_b.

---

58. a, ϱ, ϱ_a.

59.***) a, ϱ_b, ϱ_c.

60. ϱ, ϱ_a, $b + c = d$.

61. ϱ_b ϱ_c, $b - c = d$.

62. ϱ, ϱ_b, ϱ_c.

63. ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.
$\varrho_a = 30$, $\varrho_b = 7{,}5$, $\varrho_c = 48$.

---

*) Die Aufg. h_a, h_b, h_c siehe § 18 Aufg. 37.
**) 47—49 Gemischt-quadratische Probleme.
***) Die Aufg. a, ϱ, ϱ_b und a, ϱ_a, ϱ_b siehe am Ende dieses Paragraphen.

64. Gegeben die Summe zweier Seiten $b+c=d$ und die durch die Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels auf der Gegenseite bestimmten Abschnitte $CA_1=a_1$ und $BA_1=a_2$.

65. (Anschl.) Gegeben: a_1, a_2, t_a, den Winkel δ zu bestimmen, welchen t_a mit a bildet.

66. Wie Aufg. 65; jedoch sind gegeben:

$$a,\ t_a,\ b:c=\lambda:\mu.$$

Gegeben:

67. a, $b+c$, t_a.

69. h_a, t_a, $b:c=\lambda:\mu$.

71. (Anschl.) ϱ_b, ϱ_c, t'_a.

Gegeben:

68. a, $b-c$, t'_a. (Aufg. 25).

70. ϱ, ϱ_a, t_a.

---

72. a, ϱ, ϱ_b.

73. a, ϱ_a, ϱ_b.

74. r, ϱ, $b-c=d$.

Anm. Aufgaben, in denen das Verhältniss der drei Seiten eines Dreiecks und eine anderweitige Bestimmung, wie h, t, m, r, ϱ oder eine beliebige Verbindung dieser Stücke gegeben sind, kommen auf solche Aufgaben zurück, in denen die drei Winkel gegeben sind, d. h. welche bereits in den §§ 20 und 21 behandelt sind.

§ 26. Bestimmung der Winkel eines Dreiecks aus Verhältnissen in ihm enthaltener Linien oder Flächenstücke.

a. Rechtwinklige Dreiecke.

Aufg. **1 — 24.** Die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, von welchem gegeben ist:

1. Das Verhältniss δ des Lothes auf die Hypotenuse zu dieser.

2. Das Verhältniss δ der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

3. Das Verhältniss δ des Lothes auf die Hypotenuse zur Summe der beiden Katheten.

4. Das Verhältniss δ des Lothes auf die Hypotenuse zur Differenz der beiden Katheten.

5. Das Verhältniss δ des Lothes auf die Hypotenuse zum Umfange.

6. Das Verhältniss $\frac{1}{\delta}$ der Hypotenuse zur Summe der beiden Katheten.

7. Das Verhältniss $\frac{1}{\delta}$ der Hypotenuse zur Differenz der beiden Katheten.

8. Das Verhältniss $\frac{1}{\delta}$ einer Kathete zur Summe der Hypotenuse und der anderen Kathete.

9. Das Verhältniss $\frac{1}{\delta}$ einer Kathete zur Differenz der Hypotenuse und der anderen Kathete.

10. Das Verhältniss $\frac{1}{\delta}$ der Hypotenuse zum Umfange.

11. Das Verhältniss δ der Höhe auf die Hypotenuse zum Radius des inneren Berührungskreises.

12. Das Verhältniss δ der Höhe auf die Hypotenuse zum Radius des die Hypotenuse von Aussen berührenden Berührungskreises.

13. Das Verhältniss δ der Differenz und der Summe der beiden Katheten.

14. Das Verhältniss der Differenz der beiden Katheten zum Umfange.

15. Das Verhältniss der Summen der Hypotenuse und je einer Kathete.

16. Das Verhältniss der Ueberschüsse der Hypotenuse über je eine Kathete.

17. Das Verhältniss δ der Summe der beiden Katheten zur Summe der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe.

18. Das Verhältniss δ der Differenz der beiden Katheten zur Summe der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe. ($\delta = 0,6$).

19. Das Verhältniss δ einer Kathete zur Projektion der anderen Kathete auf die Hypotenuse. ($\delta = 1$).

20. Das Verhältniss δ der Halbirungslinie des rechten Winkels zur Hypotenuse.

21. Das Verhältniss δ der Abschnitte der Halbirungslinie des rechten Winkels durch den Mittelpunkt M des inneren Berührungskreises.

22. (Anschl.) Das Verhältniss δ der Abschnitte der Halbirungslinie eines spitzen Winkels durch M.

23. Das Verhältniss δ der Abschnitte der Verbindungslinie der Mittelpunkte des inneren und eines äusseren Berührungskreises durch die dazwischen liegende Seite.

- **a.** Wenn M_c der Mittelpunkt des äusseren Berührungskreises der Hypotenuse ist.
- **b.** Wenn M_a der Mittelpunkt des die Kathete a von Aussen berührenden Kreises ist.

24. Das Verhältniss δ der Abschnitte der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier äusseren Berührungskreise durch den dazwischen liegenden Eckpunkt.

- **a.** Für die beiden die Katheten von Aussen berührenden Kreise.
- **b.** Für die die Hypotenuse und die Kathete a von Aussen berührenden Kreise.

---

25. Von einem Rechteck gegeben das Verhältniss δ der Seiten: den Winkel α der Diagonalen zu bestimmen.

26. Von einem Rhombus gegeben das Verhältniss δ der beiden Diagonalen: die Winkel zu bestimmen.

27. In einem Trapez sind drei Seiten einander gleich: die Winkel zu bestimmen, wenn die vierte Seite sich zur Summe der drei ersteren verhält wie $\delta : 1$.

28. Wie Aufgabe 27, jedoch ist das Verhältniss δ der Diagonale zu den gleichen Seiten gegeben.

29. Wie Aufg. 27, jedoch ist das Verhältniss δ der Diagonale zur ungleichen Seite gegeben.

30. Wie Aufg. 27, jedoch ist das Verhältniss δ der Abschnitte der Diagonalen gegeben.

31. Die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen, in welchem die Summe der Basis und der zugehörigen Höhe gleich ist der Summe der beiden gleichen Seiten.

31a. Wie Aufg. 31, jedoch soll die Summe der Basis und Höhe sich zur Summe der beiden gleichen Seiten verhalten wie $\delta : 1$.

32. In einem gleichschenkligen Dreieck sollen die Differenzen jeder Seite und der zugehörigen Höhe einander gleich sein: die Winkel zu bestimmen.

33. Den Winkel zu bestimmen an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn das Verhältniss der Höhenabschnitte gleich δ gegeben ist.

- **a.** Für die Höhe auf die Basis.
- **b.** Für die Höhe auf einen Schenkel.

34. (Anschl.) Die Verhältnisse der Abschnitte der Höhe auf die Basis und der Höhe auf die Schenkel sollen einander gleich sein.

35. Von einem Rhombus ist das Verhältniss δ der Differenz der beiden Diagonalen zum Umfange gegeben: die Winkel zu bestimmen.

b. Schiefwinklige Dreiecke.

Aufgabe **36 — 62**. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem gegeben sind:

36. Die Verhältnisse der drei Höhen: $h_1 : h_2 : h_3 = \lambda : \mu : \nu$.

37. Die Verhältnisse der durch die Fusspunkte der Höhen auf zwei Seiten bestimmten Abschnitte:

$$BA_1 = \lambda \cdot CA_1 \text{ und } AB_1 = \mu \; CB_1.$$

38. Die Verhältnisse der Abschnitte zweier Höhen:

$$AP = \lambda \cdot A_1P \text{ und } BP = \mu \cdot B_1P.$$

39. Die Verhältnisse zweier Seiten zu den zugehörigen Höhen: $h_a = \lambda a$, $h_b = \mu b$.

40. Die drei Seiten und die Höhe auf die erste derselben sollen eine geometrische Reihe bilden: $a : b = b : c = c : h_a$.

41. Das Verhältniss einer Seite zu ihrer Höhe gleich $8 : 7$ und das Verhältniss der beiden anderen Seiten gleich $3 : 4$.

41a. Das Verhältniss einer Seite zu ihrer Höhe gleich λ und das der beiden anderen Seiten gleich μ.

42. Die Verhältnisse zweier Seiten zur Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels: $t_a = \lambda c = \mu b$.

43. Die Verhältnisse zweier Seiten zur Mittellinie nach der dritten Seite: $m_a = \lambda c = \mu b$.

44. Die Verhältnisse der Radien der vier Berührungskreise eines Dreiecks:

a. $\varrho_a = \lambda \varrho$ und $\varrho_b = \mu \varrho$.

b. $\varrho_a = \lambda \varrho_c$ und $\varrho_b = \mu \varrho_c$.

45. Die Verhältnisse zweier Höhen zum Radius des inneren Berührungskreises: $h_a = \lambda \varrho$, $h_b = \mu \varrho$.

46. Die Verhältnisse zweier Seiten zu den entgegengesetzten Höhenabschnitten der dritten Seite: $AC_1 = \lambda a$, $BC_1 = \mu b$.

47. Die Verhältnisse einer Seite zur Summe und zur Differenz der beiden anderen: $a = \lambda (b + c) = \mu (b - c)$.

48. Die Verhältnisse zweier Seiten, je zur Summe der beiden anderen: $a = \lambda (b + c)$, $b = \mu (c + a)$.

49. Das Verhältniss der Summe zweier Seiten zur dritten Seite und das Verhältniss dieser Seite zur zugehörigen Höhe: $b + c = \lambda a$, $h_a = \mu a$.

50. Das Verhältniss der Differenz zweier Seiten zur dritten Seite, $b - c = \lambda a$, und das Verhältniss dieser Seite zur zugehörigen Höhe, $h_a = \mu a$.

51. Die Verhältnisse der Abschnitte, in welche zwei Seiten durch die Berührungspunkte des inneren Berührungkreises getheilt werden: $CA_1 = \lambda \cdot BA_1$ und $CB_1 = \mu \cdot AB_1$.

52. Die Verhältnisse der Abschnitte, in welche zwei verlängerte Seiten durch die Berührungspunkte eines äusseren Berührungskreises getheilt werden:

$$CB_2 = \mu \cdot AB_2 \text{ und } BC_2 = \lambda \cdot AC_2.$$

53. Die Verhältnisse der Verbindungslinien der Mittelpunkte zweier äusseren Berührungskreise bezüglich mit den Endpunkten der ihnen zugehörigen Seite: $AM_c = \lambda \cdot BM_c$ und $AM_b = \mu \cdot CM_b$.

54. (Anschl.) Die Verhältnisse der Abstände der Mittelpunkte zweier äusseren Berührungskreise je von dem Zwischen- und Gegeneckpunkt des Dreiecks:

$$AM_b = \lambda \cdot BM_b \text{ und } AM_c = \mu \cdot CM_c.$$

55. Die Verhältnisse der Verbindungslinien des Mittelpunktes eines äusseren Berührungskreises mit den Ecken:

$$AM_a = \lambda \cdot BM_a = \mu \cdot CM_a.$$

56. Die Verhältnisse der Dreiecke, welche durch die oberen Abschnitte der Höhen und die Dreiecksseiten gebildet werden:

$$BPC : CPA : APB = \lambda : \mu : 1.$$

57. Die Verhältnisse der Dreiecke, welche durch die Verbindungslinien des Mittelpunktes M des umschriebenen Kreises mit den Ecken gebildet werden: $BMC : CMA : AMB = \lambda : \mu : 1$.

58. In einem Dreieck sind die Winkel halbirt und die Schnittpunkte der Halbirungslinien mit den Gegenseiten unter einander verbunden, so dass drei Eckdreiecke entstehen. Es seien gegeben die Verhältnisse derjenigen Seiten von zwei dieser Dreiecke, welche zugleich Seitenabschnitte im Fundamentaldreieck sind: $AB_1 = \lambda \cdot AC_1$ und $BC_1 = \mu \cdot BA_1$.

59. Die Verhältnisse des Inhaltes zu den Rechtecken zweier Radien der Berührungskreise: $fl = \lambda \varrho \varrho_a = \mu \varrho \varrho_b$.

60. Die Verhältnisse des Inhaltes zu den Quadraten der Radien des inneren und eines äusseren Berührungskreises:

$$fl = \lambda \varrho^2 = \mu \varrho^2{}_a.$$

61. Das Verhältniss zweier Seiten und das Verhältniss der Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels zur dritten Seite:

$$b = \lambda c,\ t_a = \mu a.$$

62. Die Verhältnisse der Halbirungslinie eines Winkels zu den durch sie gebildeten Abschnitten der Gegenseite:

$$t_a = \lambda a_1 = \mu a_2.$$

§ 27. Vermischte Dreiecks-Aufgaben.

1. Durch die Ecken eines Dreiecks wird der Umfang des umschriebenen Kreises im Verhältniss von $3:4:5$ getheilt: die Seiten zu berechnen, wenn der Radius des Kreises gleich 7 gegeben ist.

2. Von einem Dreieck gegeben die Lothe in den Mitten der beiden Seiten a und b bis zu ihrer Durchschneidung, bezüglich gleich 5 und 7,2 und der der ersteren Seite gegenüberliegende Winkel gleich $72^\circ\,41'$: die Seiten, die Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

3. Gegeben die Halbirungslinien zweier Winkel eines Dreiecks bis zu ihrer Durchschneidung $a_1 = 5$, $b_1 = 6$ und der dritte Winkel $\gamma = 56^\circ$: den Radius des eingeschriebenen Kreises zu bestimmen.

4. Den Radius des inneren Berührungskreises zu bestimmen, algebraisch und numerisch, wenn die Summe der Halbirungslinien der Winkel bis zu ihrer Durchschneidung s_1 und die Winkel gegeben sind. $s_1 = 1$, $\alpha:\beta:\gamma = 7:8:9$.

5. Gegeben die Summe der oberen Abschnitte der drei Höhen eines Dreiecks gleich s_1 und die Winkel, welche dieselben mit einander bilden λ, μ, ν: den Radius des umschriebenen Kreises zu bestimmen.

6. Gegeben die Winkel eines Dreiecks α, β, γ und die Summe der Rechtecke der Abschnitte der drei Höhen gleich d^2: den Inhalt des umschriebenen Kreises zu bestimmen, algebraisch und numerisch für die Werthe $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 70^\circ$.

7. Von einem Dreieck gegeben eine Seite a, die Summe der beiden anderen Seiten d und der Winkel δ, den die Halbirungslinie des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels mit a bildet: den Winkel α zu bestimmen.

8. Gegeben der untere Abschnitt $MA_1 = a_2$ der Halbirungslinie des Winkels A eines Dreiecks und die Winkel, welche derselbe mit den oberen Abschnitten der Halbirungslinien der beiden anderen Winkel bildet $BMA_1 = \nu$, $CMA_1 = \mu$: wie gross ist die Seite a und der obere Abschnitt der Halbirungslinie AM?

9. Wie Aufg. 8., jedoch soll statt des unteren Abschnittes MA_1 der Halbirungslinie der obere Abschnitt $MA = a_1$ derselben gegeben sein.

10. Gegeben eine Mittellinie m_a und die Winkel, welche sie mit den beiden anderen Mittellinien bildet: $ASC = \mu$, $ASB = \nu$: die Seite a zu bestimmen.

11. Von einem Dreieck gegeben die Winkel: die Winkel zu bestimmen, welche die Mittellinien mit den Gegenseiten bilden: gegeben $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 6 : 7$.

11a. (Anschl.) Welche trigonometrische Beziehung besteht zwischen den Winkeln, welche die drei Mittellinien eines Dreiecks mit den entsprechenden Gegenseiten bilden?

12. Von einem Dreieck gegeben ein Winkel β und der Winkel α_1, welchen die zu a gehörige Mittellinie mit der Gegenseite b des gegebenen Winkels bildet: die übrigen Winkel des Dreiecks zu bestimmen. Gegeben $\beta = 40°$, $\alpha_1 = 35°$.

13. Gegeben zwei Seiten und der Winkel δ, den die zur dritten Seite gehörige Mittellinie mit dieser bildet: den durchschnittenen Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

14. Gegeben ein Winkel α und der Winkel δ, den die zugehörige Mittellinie mit a bildet: gesucht die Winkel β und γ.

15. Gegeben der Inhalt eines Dreiecks fl, eine Mittellinie m_a und die Summe der Quadrate der beiden anderen Mittellinien $m_b^2 + m_c^2 = d^2$: den Winkel α zu bestimmen.

16. (Anschl.) Den Inhalt fl zu bestimmen, wenn ein Winkel α, die Mittellinie m_a zur Gegenseite und die Summe der Quadrate der beiden anderen Mittellinien d^2 gegeben sind.

17. (Anschl.) Den Inhalt fl zu bestimmen, wenn ein Winkel α, die Gegenseite a und die Summe der Quadrate der den beiden anderen Seiten zugehörigen Mittellinien d^2 gegeben sind.

18. Gegeben eine Seite c, ein anliegender Winkel α und der Radius des inneren Berührungskreises: die Seite a zu bestimmen.

---

19. Durch ein Dreieck ist eine gerade Linie gelegt, deren Abschnitt innerhalb des Dreiecks gleich ist den unteren Abschnitten der durchschnittenen Seiten: welchen Winkel bildet die Linie mit der (verlängerten) dritten Seite? Gegeben die Winkel des Dreiecks.

20. (Anschl.) Zwei Seiten eines Dreiecks sind über die dritte hinaus verlängert von einer Linie so durchschnitten, dass die Verlängerungen gleich der dritten Seite sind: welchen Winkel bildet die Linie mit der dritten Seite? Gegeben die Winkel des Dreiecks.

21. (Anschl.) In einem Dreieck wird die eine Seite von den beiden anderen bezüglich um die Stücke 6 und 5 übertroffen, während der ihr gegenüberliegende Winkel gleich $43^\circ\, 21'$ gegeben ist: die Seiten und Winkel zu berechnen. (§ 24, Aufg. 62.)

22. Wenn man in dem Eckpunkt A des Dreiecks ABC Lothe errichtet auf den zugehörigen Seiten $AA_1 \perp b$, $AA_2 \perp c$, und das Loth AA_0 fällt auf die Gegenseite: wie verhalten sich die Abschnitte dieser Seite?

23. Den Inhalt Δ_0 eines Dreiecks zu bestimmen, welches gebildet wird durch die in den aufeinanderfolgenden Ecken eines Dreiecks Δ auf den aufeinanderfolgenden Seiten desselben errichteten Lothe: wenn ausser dem Inhalt Δ die Winkel des Dreiecks gegeben sind.

24. Die Fusspunkte der Höhen eines Dreiecks ABC sind die Eckpunkte eines neuen Dreiecks $A_0B_0C_0$: die Seiten und Winkel dieses Dreiecks aus denen des gegebenen darzustellen; ebenso den Inhalt Δ_0 und den Umfang $2s_0$ des Dreiecks $A_0B_0C_0$.

25. Von einem Dreieck gegeben der Radius des umschriebenen Kreises und die Winkel: die Länge zu bestimmen der Tangenten in den Eckpunkten bis zu ihrer Durchschneidung mit den Gegenseiten.

26. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen den drei Tangenten t_1, t_2, t_3, wie sie in Aufg. 25 bestimmt sind, statt?

27. Von den Lothen, vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf die Seiten eines Dreiecks gefällt, ist das eine a_1 und die Summe der beiden anderen $b_1 + c_1$, sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel δ gegeben: die Seiten und Winkel des Dreiecks zu bestimmen. Gegeben $a_1 = 4$; $b_1 + c_1 = 5$; $\delta = 126^\circ\, 25'$.

28. (Anschl.) Wie Aufg. 27; jedoch soll anstatt der Summe die Differenz der Lothe b_1 und c_1 gegeben sein: $a_1 = 2$; $b_1 - c_1 = 1$; $d = 122^\circ\, 3'$.

29. Das Dreieck ABC wird durch einen Kreisbogen halbirt, dessen Mittelpunkt der Eckpunkt A ist: wie gross ist dieser Bogen innerhalb des Dreiecks, wenn die Seiten des Dreiecks $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ gegeben sind?

30. Von einem Dreieck gegeben zwei Seiten $a = 4$ und $b = 5$ und der eingeschlossene Winkel $\gamma = 28^\circ$: um welches Stück hat man a und b zu verlängern, damit bei gleichzeitiger Verdoppelung des Winkels γ das neue Dreieck doppelt so gross ist als das gegebene?

b. $a = 6$; $b = 7$; $\gamma = 58^\circ$.

31. Von einem Dreieck gegeben zwei Seiten $a = 9$ und $b = 5$: wie gross muss der eingeschlossene Winkel sein, damit, wenn man die gegebenen Seiten um ein gleiches Stück verlängert und den eingeschlossenen Winkel verdoppelt, das neue Dreieck doppelt so gross ist als das gegebene und die dritte Seite desselben durch den Endpunkt von b des ersten Dreiecks geht?

---

32. Innerhalb des Winkels $\alpha = 60^\circ$ liegt ein Punkt P so, dass er von dem einen Schenkel um $b_1 = 10$, von dem anderen um $c_1 = 15$ entfernt ist. Wie wird der Winkel durch die Verbindungslinie des Scheitelpunktes A mit P getheilt und wie lang ist AP?

33. Wie Aufg. 32; jedoch soll Punkt P ausserhalb des Winkels α liegen, $\alpha = 76^\circ$ gegeben sein, $b_1 = 5$, $c_1 = 4$.

34. (Anschl.) Innerhalb des Winkels α liegt der Punkt P so, dass er von dem einen Schenkel um b_1, von dem anderen um c_1 entfernt ist. Es soll durch P eine gerade Linie so gelegt werden, dass P in der Mitte ihrer Schnittpunkte B_2 und C_2 mit den Schenkeln liegt: wie lang ist B_2C_2 und welche Winkel bildet diese Linie mit den Schenkeln des Winkels α? Gegeben: $\alpha = 54^\circ$; $b_1 = 5{,}4$; $c_1 = 4{,}5$.

35. Wie Aufg. 34; jedoch soll die durch P zu legende Gerade B_2C_2 in P so getheilt werden, dass sich verhält $B_2P : C_2P = \lambda : \mu$. Gegeben: $\alpha = 54^\circ$; $b_1 = 5{,}4$; $c_1 = 4{,}5$; $\lambda : \mu = 5 : 4$.

36. Wie Aufg. 35; doch soll sich $\lambda : \mu = c_1 : b_1$ verhalten.

37. Wie Aufg. 34; jedoch soll B_2C_2 durch P so gelegt werden, dass $C_2P \cdot B_2P = d^2$ ist: Gegeben $d = 6$. (Determination.)

38. Wie Aufg. 34; jedoch soll B_2C_2 durch P so gelegt werden, dass das Dreieck B_2AC_2 eine gegebene Grösse d^2 hat. Gegeben $d = 9$. (Determination.)

39. Die Verbindungslinie eines Eckpunktes eines Dreiecks mit der Mitte der Gegenseite ist gleich 15 gegeben und theilt den zugehörigen Winkel in die Stücke $27° 18'$ und $39° 54'$: die beiden anderen Seiten zu berechnen. **b.** Gegeben: $m_a = 5$; $\alpha_1 = 25°$; $\alpha_2 = 35°$.

40. (Quadr. Probl.) Durch den Punkt P der Halbirungslinie des Winkels α, der von den Schenkeln desselben die Entfernung b hat, ist die gerade Linie B_2C_2 von der gegebenen Länge d gelegt: welche Winkel bildet diese Linie mit den Schenkeln des Winkels α? Gegeben $\alpha = 54°$; $b = 4$; $d = 9$.

41. Wie Aufg. 40; jedoch soll P auf der Halbirungslinie des Nebenwinkels von α liegen und $B_2C_2 = PB_2 - PC_2 = d = 1$ gegeben sein.

42. (Vergl. Aufg. 34.) Innerhalb des Winkels α liegt der Punkt P so, dass er von dem einen Schenkel um b_1, von dem anderen um c_1 entfernt ist. Es soll durch P eine gerade Linie B_2C_2 so gelegt werden, dass die Summen der Radien der den beiden abgeschnittenen Dreiecken APB_2 und APC_2 umschriebenen Kreise eine gegebene Grösse d hat. Gegeben $\alpha = 54°$; $b_1 = 5{,}4$; $c_1 = 4{,}5$; $d = 14$.

---

43. Durch den einen Schnittpunkt C zweier Kreise, deren Radien r, ϱ und Centrale c gegeben sind, soll eine gerade Linie gelegt werden, so dass das zwischen beiden Peripherien enthaltene Stück eine gegebene Länge d besitzt: welchen Winkel bildet diese Gerade mit der Centrale und in welchem Verhältniss wird sie selbst getheilt, die Abschnitte von C aus gerechnet? Gegeben $r = 7$; $\varrho = 6$; $c = 4$; $d = 5$.

44. Ueber derselben Sehne AD sind zwei Kreise construirt, von denen der eine den Peripheriewinkel β, der andere den Winkel γ fasst: es soll über AD das beiden Kreisen eingeschriebene Dreieck ABC construirt werden, so dass die durch D gehende Seite BC die gegebene Länge a hat. Die Theile des Winkels BAC zu bestimmen, wenn $AD = d$, β und γ gegeben sind: $d = 4$; $a = 7$; $\beta = 37°$; $\gamma = 46°$.

45. Wie Aufg. 44; jedoch soll die Differenz der Abschnitte der Seite BC, nämlich $BD - DC = e$ gegeben sein.

46. Wie Aufg. 44; doch soll das Verhältniss der Abschnitte der Seite BC, nämlich $BD : CD = \lambda : \mu$ gegeben sein. ($\lambda : \mu = 5 : 3$.)

47. Wie Aufg. 46; jedoch sollen die Abschnitte der Seite BC einander gleich sein.

48. Wie Aufg. 44; jedoch soll das Rechteck der Abschnitte der Seite BC einen gegebenen Werth haben, nämlich $BD \cdot DC = e^2$; $e = 3$. (Determination).

49. Wie Aufg. 44; jedoch soll die Differenz der Quadrate der Abschnitte von BC einen gegebenen Werth haben, nämlich $BD^2 - CD^2 = e^2$.

50. Wie Aufg. 44; jedoch soll der Inhalt des Dreiecks ABC einen gegebenen Werth haben, $fl = e^2$.

51. Wie Aufg. 44; jedoch soll der Umfang des Dreiecks ABC einen gegebenen Werth haben, gleich e.

52. Wie Aufg. 44; jedoch soll $AB + AC$ um e grösser als BC sein.

53. Wie Aufg. 44; jedoch soll der Radius des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises den gegebenen Werth ϱ haben.

54. Wie Aufg. 44; jedoch sollen die Umfänge der beiden Dreiecke ABD und ACD einander gleich sein.

55. Der Mittelpunkt M des inneren Berührungskreises des Dreiecks ABC ist mit den Ecken verbunden: die Verbindungslinien MA, MB, MC, sowie die Dreiecke MBC, MCA, MAB zu bestimmen, algebraisch und numerisch, wenn gegeben sind die drei Seiten $a = 7$; $b = 6$; $c = 5$.

56. Wie Aufg. 55; jedoch soll an Stelle des Punktes M der Mittelpunkt M_a des die Seite a von Aussen berührenden Kreises treten.

57. (Anschl.) **a.** Welche Beziehung findet statt zwischen den Abständen einer Ecke eines Dreiecks von den Mittelpunkten des inneren und des die Gegenseite von Aussen berührenden Berührungskreises? — **b.** Welche Beziehung zwischen den Abständen einer Ecke von den Mittelpunkten der die beiden einschliessenden Seiten von Aussen berührenden äusseren Berührungskreise?

58. Einem Dreieck ist der innere Berührungskreis eingeschrieben: wie gross sind die durch die Bogen desselben abgeschnittenen krummlinigen Dreiecke? Geg. $a = 7$, $b = 6$, $c = 5$.

59. Wie Aufg. 58; jedoch soll an Stelle des inneren Berührungskreises der die Seite a von Aussen berührende äussere Berührungskreis treten.

60. Um die Eckpunkte eines Dreiecks als Mittelpunkte sind Kreise construirt, welche sich zu zwei von Aussen berühren: wie gross sind die innerhalb des Dreiecks liegenden Bogen und das durch sie begrenzte Flächenstück? Gegeben $a = 7$; $b = 6$; $c = 5$.

61. (Anschl.) Dem gegebenen Dreieck sei zugleich der innere Berührungskreis eingezeichnet: wie gross sind die durch die Bogen dieses Kreises und der in Aufg. 60 construirten Kreise begrenzten krummlinigen Figuren?

62. Um die Eckpunkte eines Dreiecks als Mittelpunkte sind drei Kreise construirt, welche sich zu zwei von Aussen berühren, und an diese Kreise die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten gelegt: welche Winkel bilden diese Tangenten mit einander? Gegeben $a = 5$; $b = 4$; $c = 3$.

63. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen den Winkeln eines Dreiecks statt, wenn von den gemeinschaftlichen äusseren Tangenten in Aufg. 62 zwei parallel sein sollen?

64. (Anschl. an 62.) Die Seiten des durch die Tangenten in Aufg. 62 gebildeten Dreiecks zu berechnen.

65. Drei gleich grosse Kreise berühren einander zu zwei: die Radien zu berechnen der beiden Kreise, deren einer sie alle drei von Aussen, der andere sie alle drei von Innen berührt. (Vergl. Aufg. 88).

66. Drei Kreise, deren Radien sich wie $1 : 1 : \lambda$ verhalten, berühren sich zu zwei von Aussen: die Winkel zu berechnen des Dreiecks, welches durch die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten gebildet wird.

67. **a.** Für welchen Werth von λ sind von diesen Tangenten zwei parallel? **b.** Für welchen Werth von λ ist der eine Winkel der Tangenten ein gestreckter? **c.** Für welchen Werth von λ wird dieser Winkel ein rechter?

68. (Anschl.) An zwei sich berührende gleiche Kreise mit dem Radius r ist eine gemeinschaftliche äussere Tangente gelegt: den Radius desjenigen Kreises zu berechnen, der beide Kreise und die Tangente berührt.

69. Drei Kreise, deren Radien sich wie $\lambda : \mu : \nu$ verhalten, berühren sich zu zwei von Aussen: die Winkel zu berechnen des Dreiecks, welches durch die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten gebildet wird.

70. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen λ, μ, ν, den Radien dreier sich zu zwei von Aussen berührenden Kreise statt, wenn dieselben eine gemeinschaftliche äussere Tangente haben sollen?

70a. An zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2, die sich von Aussen berühren, ist eine gemeinschaftliche äussere Tangente gelegt und dadurch ein krummliniges Dreieck gebildet: den Radius x zu bestimmen des diesem Dreieck eingeschriebenen Kreises, wenn $\frac{r_1}{r_2} = \lambda$ gegeben ist.

71. An drei sich zu zwei von Aussen berührende Kreise sind die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten gelegt und es soll ein Winkel dieser Tangenten gleich dem Winkel der zugehörigen Centralen sein: den Radius x des mittleren Kreises zu berechnen, wenn die des grössten und kleinsten Kreises gleich r_1 und r_2 gegeben sind.

72. Einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Seiten (a, b, b) und Winkel (α, β, β) gegeben sind, sind drei Kreise eingeschrieben, welche einander zu zwei berühren: die Radien zu berechnen. Besonderer Fall: $\alpha = 90^\circ$: wie verhalten sich alsdann die Radien?

73. Einem gegebenen Winkel α ist ein Kreis mit dem Radius r eingezeichnet: es soll der Radius eines zweiten Kreises berechnet werden, welcher den ersteren und die Schenkel des Winkels α berührt.

74. (Anschl.) Einem gegebenen Winkel α ist eine Reihe von Kreisen eingeschrieben, welche sich aufeinanderfolgend zu zwei berühren: wie gross ist die Summe der Umfänge dieser Kreise, vom Kreise mit dem Radius r anfangend bis zum Scheitelpunkte hin?

75. Einem gegebenen Winkel α ist ein Kreis K mit dem Radius r eingeschrieben, die Radien zu berechnen zweier gleich grossen Kreise, welche einander, den Kreis K von Aussen und je einen Schenkel des Winkels α berühren.

76. Wie Aufg. 75; jedoch sollen die gesuchten Kreise den gegebenen von Innen berühren.

77. Einem gegebenen Winkel α sind zwei gleich grosse Kreise mit dem Radius r eingezeichnet, so dass sie einander und je einen Schenkel des Winkels α und seine Halbirungslinie berühren: den Radius eines Kreises zu bestimmen, der zugleich beide Kreise und beide Schenkel von α berührt.

78. Wie Aufg. 77; jedoch soll der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise umhüllen.

79. Einem gegebenen Winkel α sind zwei gleich grosse Kreise mit dem Radius r eingezeichnet, so dass sie einander und je einen Schenkel des Winkels α und seine Halbirungslinie berühren: den Radius eines Kreises zu bestimmen, der durch den Scheitelpunkt A geht und für den die ersten beiden Kreise äussere Berührungskreise sind.

80. Wie Aufg. 79, jedoch soll der gesuchte Kreis die beiden anderen Kreise umhüllen.

81. Den Radius eines Kreises K zu bestimmen, der einem Kreisausschnitt mit dem Radius r und dem Centriwinkel α eingeschrieben ist.

82. (Anschl.) Den Radius zu bestimmen eines Kreises, welcher dem krummlinigen Eckdreieck, gebildet durch einen Radius, den Bogen des Kreisausschnittes und einen Bogen des Kreises K (Aufg. 81), eingeschrieben ist.

82a. (Anschl.) Einem Kreisquadranten ACB ist ein Kreis eingeschrieben und einem der dadurch gebildeten Eckdreiecke ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt M: welchen Werth hat die Tangente des Winkels MCA?

83. An einen Kreis K mit dem Radius r sind von einem Punkte A aus Tangenten AE und AF gelegt, welche den Winkel α mit einander bilden: der Winkel α wird durch die Linie AB durchschnitten, so dass die Winkel $CAB = \alpha_1$ und $FAB = \alpha_2$ entstehen und $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ist; den Winkeln α_1 und α_2 sind Kreise eingezeichnet, welche die Berührungspunkte E und F mit dem Kreise K gemeinschaftlich haben: die Radien r und r_1 dieser Kreise zu bestimmen.

84. Wie Aufg. 83, jedoch sollen die Winkel α, α_1, α_2 zusammen 360° betragen.

85. Die Berührungspunkte dreier Kreise, welche einander zu zwei von Aussen berühren, liegen auf einem Kreise mit dem Radius r in der Weise, dass durch sie die Peripherie im Verhältniss von $5:6:7$ getheilt wird: welches sind die Radien der drei Kreise?

86. An drei Kreise, welche sich zu zwei von Aussen berühren, sind die gemeinschaftlichen inneren Tangenten gelegt: wie gross sind die Winkel derselben, wenn die Radien r_1, r_2, r_3 gegeben sind. ($r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$).

87. (Anschl.) Drei gerade Linien, welche auf einander folgend die Winkel α_1, α_2, α_3 bilden, so dass $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ$, sind die gemeinschaftlichen inneren Tangenten dreier sich berührenden Kreise: die Radien derselben zu bestimmen, wenn ihre Summe gleich a gegeben ist.

88. Gegeben drei Kreise, welche sich zu zwei berühren, mit den Radien l, m, n: den Radius x eines Kreises zu bestimmen, der alle drei Kreise zugleich berührt.

Zum Problem des Apollonius.

89. Einen Kreis zu construiren, von dem zwei Tangenten und ein Punkt gegeben sind.

90. (Anschl.) Einen Kreis zu bestimmen, von welchem zwei Tangenten und ein Kreis, welchen er berühren soll, gegeben sind.

91. Von dem zu bestimmenden Kreise sollen zwei Punkte und ein Berührungskreis gegeben sein.

92. Den Radius eines Kreises zu bestimmen, der durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berühren soll.

93. (Anschl.) Den Radius eines Kreises zu bestimmen, der zwei gegebene Kreise, mit den Radien r und ϱ, wo $r > \varrho$, und eine gegebene Linie berühren soll.

93a. (Anschl.) Die gegenseitige Lage zweier Kreise A und B und einer geraden Linie L ist dadurch bestimmt, dass die Centrale $AB = c = 10$ gegeben ist und das von A auf L gefällte Loth mit AB den Winkel $\alpha = 60^\circ$ bildet und die Länge $l = 8$ besitzt. Es soll der Radius x eines Kreises berechnet werden, der beide Kreise und die Linie L berührt. Gegeben die Radien der Kreise um A und B bezüglich $\varrho = 1$ und $r = 2$.

94. Den Radius eines Kreises zu bestimmen, der durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kreise berühren soll.

95. (Anschl.) Den Radius eines Kreises zu bestimmen, der drei ihrer Lage nach gegebene Kreise berühren soll.

95a. (Anschl.) Um die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks sind Kreise construirt mit den Radien 1, 2, 3: den Radius zu berechnen eines Kreises, der alle drei Kreise berührt. Gegeben $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

C. Vierecke.

§ 28. Parallelogramme, Trapeze.

a. Das Parallelogramm.

Von einem Parallelogramm gegeben:

1. Zwei Seiten und der Winkel der beiden Diagonalen, den Inhalt zu bestimmen.

2. Gegeben die beiden Diagonalen und ein Winkel, den Inhalt zu bestimmen. (Welche Beziehung besteht zwischen der Differenz der Quadrate zweier Seiten eines Parallelogramms und dem Rechteck seiner Diagonalen?)

3. Gegeben die beiden Diagonalen und ihr Winkel: die Winkel des Parallelogramms zu bestimmen.

4. Gegeben eine Diagonale d und die Winkel α_1 und α_2, welche die zweite Diagonale mit den Seiten bildet: den Inhalt zu bestimmen. Gegeben $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 35°$.

5. Gegeben ein Winkel γ, eine Diagonale d und der Winkel beider Diagonalen δ: die Winkel zn bestimmen der Diagonale d mit den Seiten. Gegeben $\gamma = 70°$; $\delta = 40°$.

6. Gegeben die Winkel, welche die Diagonalen mit den Gegenseiten bilden, α und β: den Winkel der beiden Diagonalen zu bestimmen. Gegeben $\alpha = 32°$; $\beta = 43°$.

7. Gegeben das Verhältniss zweier Seiten gleich λ und das Verhältniss der beiden Diagonalen gleich μ: die Winkel zu bestimmen.

8. Gegeben die Verhältnisse der beiden ungleichen Seiten, je zu einer Diagonale: die Winkel zu bestimmen.

9. Gegeben das Verhältniss der beiden ungleichen Seiten gleich λ und der Winkel δ der beiden Diagonalen: die Winkel zu bestimmen.

10. Gegeben das Verhältniss der beiden Diagonalen gleich λ und die Winkel des Parallelogramms: den Winkel der Diagonalen zu bestimmen.

11. Gegeben ein Winkel γ und der Winkel der Diagonalen δ: das Verhältniss der beiden Seiten x und das der beiden Diagonalen y zu bestimmen.

12. (Anschl.) Gegeben der Umfang $= 2s$, ein Winkel γ und der Winkel der Diagonalen δ: den Inhalt und die Seiten zu bestimmen.

13. (Anschl. an 11.) Gegeben die Summe e der beiden Diagonalen, ihr Winkel δ und ein Winkel γ des Parallelogramms: den Inhalt und die Diagonalen zu bestimmen. (Welche Sätze ergeben sich aus Aufg. 12 und 13 über den Zusammenhang von Inhalt, Umfang, Summe der Diagonalen und Winkeln von Parallelogrammen?)

14. Gegeben die Differenz der Seiten gleich e, ein Winkel γ und der Winkel δ der Diagonalen: die Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

15. Wie Aufg. 14; jedoch ist statt der Differenz der Seiten die Differenz der beiden Diagonalen gleich e gegeben.

---

16. Gegeben die beiden Höhen h_1 und h_2 und ein Winkel γ: den Inhalt und den Winkel δ der beiden Diagonalen zu bestimmen.

17. Gegeben die beiden Höhen h_1 und h_2 und der Winkel δ der Diagonalen: den Inhalt und die Winkel zu bestimmen.

18. (Anschl.) Gegeben das Verhältniss der beiden Höhen gleich λ und ein Winkel γ: den Winkel der beiden Diagonalen zu bestimmen.

19. (Anschl.) Gegeben das Verhältniss der beiden Höhen gleich λ und der Winkel δ der Diagonalen: die Winkel des Parallelogramms zu bestimmen. (Aus γ und δ das Verhältniss λ der Höhen zu finden.)

20. Gegeben die Summe der beiden Höhen gleich e, ein Winkel γ und der Winkel δ der Diagonalen: den Inhalt zu bestimmen.

b. Das Trapez.

21. Von einem Trapez gegeben die vier Seiten, nämlich, die parallelen Seiten a und b und die nicht parallelen c und d: den Winkel ε zu bestimmen, welchen die letzteren bei ihrer Verlängerung bilden.

22. (Anschl.) Gegeben die beiden nicht parallelen Seiten c und d, der Winkel ε, den sie bei hinreichender Verlängerung mit einander bilden und die Grundlinie a: den Inhalt zu bestimmen.

23. Gegeben die Mittellinie (Verbindungslinie des Mittelpunktes der nicht parallelen Seiten) gleich m, die nicht parallelen Seiten c und d und der Winkel ε, den sie verlängert bilden: welche Winkel bilden c und d mit der Mittellinie des Trapezes?

24. Wie Aufg. 23; jedoch sollen a und b bestimmt werden.

25. (Anschl.) Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der parallelen Seiten zu bestimmen; ferner diejenige Linie, durch welche die parallelen Seiten im Verhältniss der anstossenden nicht parallelen Seiten getheilt werden.

26. (Anschl.) Gegeben die nicht parallelen Seiten c und d, und die Verbindungslinie e derjenigen beiden Punkte der parallelen Seiten, durch welche diese im Verhältniss der anstossenden Seiten c und d getheilt werden: den Winkel ε zu bestimmen, unter dem c und d verlängert sich schneiden.

27. Unter welchem Winkel ε schneiden sich die nicht parallelen Seiten c und d eines Trapezes, welche als gegeben zu betrachten sind, wenn ausserdem der Inhalt des Trapezes $fl = \varDelta$ und die Mittellinie m gegeben sind? Welches ist der grösste Werth von $\varDelta$ und für welchen Winkel ε?

28. Den Inhalt eines Trapezes zu bestimmen, von welchem die Mittellinie m, die Summe der nicht parallelen Seiten gleich g und die Winkel an der Basis α und β gegeben sind.

29. (Anschl.) Gegeben der Inhalt $\varDelta$, die Mittellinie m, die Summe der nicht parallelen Seiten g und der Winkel ε, unter dem sich diese Seiten verlängert schneiden: die Winkel des Trapezes zu bestimmen.

30. Ein Trapez ist einem Kreise mit dem Radius ϱ umschrieben: die Seiten zu berechnen, wenn die Winkel α und β gegeben sind.

31. (Anschl.) Von einem Trapez, welches einem Kreise mit dem Radius ϱ umschrieben ist, sind ausser ϱ die beiden nicht parallelen Seiten gegeben: den Inhalt und die Winkel zu bestimmen.

32. (Anschl.) Von einem Trapez, welches sich einem Kreise umschreiben lässt, sind gegeben das Verhältniss der parallelen Seiten $\frac{a}{b} = \lambda$ und das der nicht parallelen Seiten $\frac{c}{d} = \mu$: die Winkel zu bestimmen.

33. Von einem Trapez, dessen Diagonalen e und f und parallele Seiten a und b sämmtlich Tangenten sind eines Kreises mit dem Radius ϱ, gegeben ϱ und die Winkel der Diagonalen mit den parallelen Seiten $\angle(a,e) = \alpha_1$ und $\angle(a,f) = \beta_1$: die Diagonalen und die Seiten zu berechnen.

34. (Anschl.) Von einem Trapez wie in Aufg. 33 gegeben das Verhältniss der parallelen Seiten $\frac{a}{b} = \lambda$ und das Verhältniss der beiden Diagonalen $\frac{e}{f} = \mu$: die Winkel α_1 und β_1 der Diagonalen mit den parallelen Seiten zu bestimmen.

35. Von einem Trapez, dem sich ein Kreis umschreiben lässt, gegeben die parallelen Seiten und die Winkel: den Inhalt und den Radius r zu bestimmen. Den Kreis zu construiren.

36. (Anschl.) Die Winkel eines Trapezes zu bestimmen, welches sich einem Kreise mit dem Radius r einschreiben lässt, und von welchem die parallelen Seiten a und b gegeben sind.

37. (Anschl.) Von einem Antiparallelogramm gegeben die beiden parallelen Seiten a und b: den Radius zu bestimmen des kleinsten Kreises, welcher sich dem Trapez umschreiben lässt.

38. Die Winkel eines Trapezes zu bestimmen, in welchem die nicht parallelen Seiten c einander gleich sind und zu den parallelen Seiten a und b ein gegebenes Verhältniss haben, $a = \lambda c$, $b = \mu c$.

39. Die Winkel zu bestimmen, wenn die Verhältnisse der vier Seiten des Trapezes gegeben sind, $d = \lambda b$, $a = \mu b$, $c = \nu b$, wo b parallel a.

40. Die Winkel zu bestimmen, wenn die Verhältnisse der parallelen Seiten a und b und der beiden Diagonalen e und f gegeben sind, $a = \lambda b$, $e = \mu f$, $a = \nu e$.

41. Die Winkel zu bestimmen, wenn die Verhältnisse der nicht parallelen Seiten c und d und der beiden Diagonalen e und f gegeben sind, $c = \lambda d$, $e = \mu f$, $c = \nu e$.

42. Einem Kreise mit dem Radius r ist ein Trapez eingeschrieben, und zwar gehören zu den parallelen Seiten a und b desselben bezüglich die Centriwinkel 2α und 2β: wie gross ist der Inhalt des Trapezes und der zur mittleren Sehne (verlängerten Mittellinie) gehörige Centriwinkel?

43*). Einem Kreise sind drei aequidistante und parallele Sehnen eingezeichnet, von denen die beiden äusseren gleich a und b und ihr Abstand h gegeben sind: die mittlere Sehne x zu bestimmen.

44. (Verallgemeinert.) Einem Kreise sind drei parallele Sehnen eingezeichnet, $2a$, $2b$, $2c$, deren Abstände $(ab):(bc)$ sich verhalten wie $\lambda:\mu$. Wie gross ist der Abstand h der beiden äusseren Sehnen $2a$ und $2c$?

§ 29. Das Viereck im Kreise und um den Kreis.

a. Das Sehnenviereck.

1. Gegeben von einem Viereck im Kreise eine Seite und die Winkel, welche sie mit den anstossenden Seiten und mit den beiden Diagonalen bildet: die Seiten und den Inhalt zu bestimmen.

2. Gegeben eine Diagonale und die Winkel, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet: die Seiten, die andere Diagonale, den Inhalt, den Radius des umschriebenen Kreises zu bestimmen.

3. Gegeben der Inhalt und die Winkel, welche eine Seite mit den beiden anstossenden Seiten und den Diagonalen bildet: den Radius des umschriebenen Kreises zu bestimmen.

4. Von einem Vierseit im Kreise gegeben zwei Seiten a und b, der eingeschlossene Winkel und die zugehörige Diagonale: die übrigen Winkel zu bestimmen.

5. Gegeben zwei Gegenseiten und die Winkel: die beiden anderen Seiten zu bestimmen. Gegeben $a = 5$, $c = 3$ und die Winkel an c gleich $100°$ und $53°$.

6. Gegeben der Radius r des umschriebenen Kreises, eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel: die fehlenden Seiten zu bestimmen.

7. (Anschl.) Von einem Sehnenviereck gegeben zwei Gegenseiten und die Winkel an einer an derselben: den Radius zu bestimmen, die beiden anderen Seiten und den Inhalt. Das Viereck zu construiren.

---

*) Aufg. 43 dient zur Berechnung des Inhaltes eines Kugelabschnittes.

8. (Anschl.) Gegeben zwei Gegenseiten und die Winkel, welche die Diagonalen mit einer derselben bilden: den Radius des umschriebenen Kreises und die Diagonalen zu bestimmen.

9. (Anschl.) Gegeben die beiden Diagonalen und die Winkel einer derselben mit zwei Gegenseiten.

10. Den Inhalt zu bestimmen eines Vierecks, von welchem eine Diagonale e, deren Winkel mit den Seiten in einem Eckpunkte α_1 und α_2 und der Radius r des umschriebenen Kreises gegeben sind.

11. Gegeben drei Seiten eines Sehnenvierecks und der Winkel, welchen die mittelste von ihnen (verlängert) mit der vierten Seite bildet: die vierte Seite und die Winkel zu berechnen. Gegeben $a = 3$; $b = 5$; $c = 13$; $\measuredangle (b, d) = \varepsilon = 14^\circ\, 15'$.

12. Gegeben zwei Gegenseiten, eine Diagonale und der Winkel beider Diagonalen: gesucht die fehlenden Seiten und Winkel des Vierecks. $a = 3$; $c = 4$; $e = 4{,}5$; $(e, f) = 90^\circ = \theta$.

13. Den Winkel der beiden Diagonalen zu bestimmen, wenn zwei Gegenseiten und die Winkel des Sehnenvierecks gegeben sind.

14. Die Winkel zu bestimmen eines Vierecks im Kreise, von welchem die Verhältnisse der vier Seiten gegeben sind. Gegeben $a : b : c : d = \alpha : \beta : \gamma : \delta$.

15. Wie Aufg. 14; jedoch sollen die Verhältnisse zweier Gegenseiten und der Diagonalen gegeben sein, nämlich $a : c : e : f = \alpha : \gamma : \varepsilon : \theta$.

16. (Anschl.) Wie Aufg, 14; jedoch sollen gegeben sein die Verhältnisse der Dreiecke, in welche das Viereck durch die Diagonalen getheilt wird, und das zweier anstossenden Seiten: nämlich $\frac{bc}{ad} = \lambda$; $\frac{ab}{cd} = \mu$; $\frac{a}{b} = \gamma$.

---

17. Gegeben der Winkel der beiden Diagonalen $= \lambda$, die Winkel der Gegenseitenpaare, μ und ν, und der Radius r des umschriebenen Kreises: die Seiten, die Diagonalen und den Inhalt zu bestimmen.

18. (Anschl.) Wie Aufg. 17; jedoch ist statt r eine Seite des Vierecks gegeben.

19. (Anschl.) Wie Aufg. 17; jedoch ist statt r der Inhalt des Vierecks gegeben.

20. Von einem Vierseit im Kreise gegeben der Winkel zweier Gegenseiten, die Summe der beiden anderen Gegenseiten und der Winkel der beiden Diagonalen: den Radius zu bestimmen.

21. Gegeben die Winkel der beiden Gegenseitenpaare und die Differenz der beiden Diagonalen: den Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen.

22. Wie Aufg. 21; jedoch sollen ausser den Winkeln der Gegenseitenpaare die Winkel der beiden Diagonalen und die Differenz der beiden Dreiecke gegeben sein, in welche das Viereck durch eine Diagonale getheilt wird.

---

23. Gegeben der Radius r des umschriebenen Kreises und die Winkel, welche die Radien nach den Ecken mit einander bilden, 2α, 2β, 2γ, 2δ: den Inhalt zu bestimmen durch Summation der Bestimmungsdreiecke.

23a. (Anschl.) Die Seiten eines convexen Vierecks sind vier Diagonalen eines regelmässigen Vielecks, welche bezüglich eine, zwei, drei, vier Ecken desselben abschneiden: den Inhalt zu bestimmen, wenn der Radius r des umschriebenen Kreises gegeben ist.

24. Wie Aufg. 23; jedoch soll der Inhalt durch Summation zweier durch eine Diagonale des Vierecks entstehenden Dreiecke dargestellt werden. (Welche trigonometrische Formel ergiebt sich durch Vergleichung der Resultate in Aufg. 23 und 24?)

25. Durch den trigonometrischen Zusammenhang zwischen den zu den Seiten und Diagonalen eines Vierseits im Kreise gehörigen Centriwinkeln die Richtigkeit nachzuweisen des Ptolemäischen Satzes $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.

26. Zu beweisen, dass in jedem Kreissehnenviereck das Rechteck der beiden Diagonalen viermal so gross ist als die Summe der Rechtecke der vom Mittelpunkt M des Kreises auf die Gegenseiten gefällten Lothepaare.

26a. Ebenso, dass das Rechteck der Lothe von M auf zwei Gegenseiten, vermindert um das Rechteck der Lothe auf die Diagonalen, ein Viertel so gross ist als das Rechteck der Lothe auf die beiden anderen Gegenseiten.

27. (Anschl.) Welche Eigenschaft des Kreissehnenvierecks ergiebt sich aus der Entwickelung des Ausdrucks:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma - \sin 2\delta \quad (\S\ 6, \text{Aufg. } 3),$$

wenn 2α, 2β, 2γ, 2δ die zu den auf einander folgenden Seiten a, b, c, d gehörigen Centriwinkel sind?

28. Wie Aufg. 27; jedoch soll die Formel:

$$\sin\gamma\cdot\cos\alpha - \sin\delta\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\gamma+\beta)$$

der Darstellung zu Grunde liegen?

29. Wie Aufg. 27; geometrisch darzustellen sei jedoch die sich durch Entwickelung von $\sin(\alpha+\gamma) = \sin(\beta+\delta)$ ergebende Formel.

b. Das Tangentenviereck.

30. Von einem Tangentenviereck gegeben der Radius ϱ und die Winkel: die Seiten zu bestimmen, die Summe der Gegenseiten und den Inhalt. (Vergl. § 35, Aufg. 34).

30a. Geometrisch darzustellen die Richtigkeit der Beziehung zwischen den Winkeln eines Vierecks

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}.$$

31. Gegeben eine Seite und die Winkel: den Radius ϱ und den Inhalt zu bestimmen.

32. Gegeben der Umfang $2s$ eines Tangentenvierecks und die Winkel: ϱ und den Inhalt zu bestimmen.

33. Gegeben der Inhalt und die Winkel: ϱ zu bestimmen.

34. Gegeben der Radius ϱ und die Winkel: die Berührungssehnen zu bestimmen und den Inhalt des durch sie gebildeten eingeschriebenen Vierecks.

35. (Anschl.) Aus dem Inhalt $\mathfrak{fl}$ und den Winkeln eines Tangentenvierecks den Inhalt $\mathfrak{fl}_1$ des durch die Berührungssehnen gebildeten eingeschriebenen Vierecks zu bestimmen.

36. Geometrisch zu interpretiren die Gleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}=\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\delta}{2}$$ (§ 6, Aufg. 9)

wenn α, β, γ, δ die auf einander folgenden Winkel eines Tangentenvierecks sind.

37. Ebenso unter derselben Voraussetzung die Gleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

---

38. Von einem Tangentenviereck gegeben zwei Gegenseiten und die beiden der einen von ihnen anliegenden Winkel: die beiden anderen Gegenseiten zu bestimmen.

Gegeben $a=5$, $c=3$, $(d, a)=\alpha=70^\circ$, $(a, b)=\beta=80^\circ$.

39. Gegeben zwei Gegenseiten und die einer dritten Seite anliegenden Winkel: die beiden fehlenden Winkel zu bestimmen.

Gegeben $a=5$, $c=3$, $(a, b)=\beta=80^\circ$, $(b, c)=\gamma=120^\circ$.

40. (Quadratisches Problem). Gegeben zwei Seiten a und b, der eingeschlossene Winkel β und der Gegenwinkel δ: gesucht die Gegenseite von a.

41. (Anschl.) Zu beweisen, dass in einem Tangentenviereck die durch eine Diagonale sich ergebenden Theile des Vierecks sich wie die Cotangenten der halben, nicht durchschnittenen Winkel verhalten.

42. Gegeben zwei Gegenwinkel und die einen dritten Winkel einschliessenden Seiten: die fehlenden Seiten zu bestimmen.

43. Die Gegenwinkel α und γ eines Vierecks werden durch die Diagonale AC in die Stücke α_1, α_2 und γ_1, γ_2 getheilt, wo α_1 und γ_1, sowie α_2 und γ_2 bezüglich demselben Dreieck zugehören: welche Beziehung findet zwischen diesen Winkeln statt, wenn das Viereck ein Tangentenviereck sein soll?

44. (Anschl.) Zu beweisen, dass wenn man den durch eine Diagonale eines Tangentenvierecks bestimmten Theildreiecken Kreise einzeichnet, diese auf der Diagonale denselben Berührungspunkt haben.

45. Aus dem Radius des eingeschriebenen Kreises und zwei Gegenwinkeln die Differenzen zu bestimmen der die nicht gegebenen Winkel einschliessenden Seiten.

46. Gegeben drei Seiten und ein Winkel: den Gegenwinkel und ϱ zu bestimmen;

$$a=4,\ b=2,\ c=1:(d=3),\ (a, b)=\alpha=48^\circ.$$

---

47. In einem Kreise mit dem Radius ϱ sind zwei parallele Sehnen gezogen, zu denen die Centriwinkel 2α und 2β gehören, und in den Endpunkten derselben die Tangenten gezeichnet: wie gross sind die Diagonalen und der Inhalt des durch diese Tangenten bestimmten Vierecks?

48. Die Tangenten in den Eckpunkten eines Kreissehnenvierecks sind die Seiten eines dem Kreise umschriebenen Vierecks, die Seiten desselben zu bestimmen, wenn der Radius r und die zu den Seiten des Vierecks gehörigen Centriwinkel 2α, 2β, 2γ, 2δ gegeben sind.

49. (Anschl.) Die Summen der Gegenseitenpaare des umschriebenen Vierecks zu bestimmen.

50. (Anschl.) Den Inhalt des Tangentenvierecks $A_1B_1C_1D_1$ vermittelst ϱ darzustellen als Summe der Dreiecke A_1MB_1, B_1MC_1, C_1MD_1, D_1MA_1, wo M der Mittelpunkt des Kreises ist, und das dadurch gewonnene Resultat mit dem von Aufgabe 30 zu vergleichen. (S. auch Aufg. 30a).

---

51. Den Inhalt zu bestimmen eines Vierecks, welchem sich ein Kreis einschreiben und umschreiben lässt, wenn gegeben sind der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und zwei einer Seite anliegende Winkel. (Vergl. § 35, Aufg. 32).

52. (Anschl.) Wie Aufg. 51; jedoch soll r, der Radius des umschriebenen Kreises, bestimmt werden.

53. (Anschl.) Den Radius ϱ zu bestimmen, wenn r und die Winkel gegeben sind.

54. (Anschl.) Einem Kreise mit dem Radius ϱ ist ein Viereck umgeschrieben, welches zugleich einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben ist: die Winkel zu bestimmen, wenn zwei Gegenseiten sich (verlängert) unter dem Winkel ε durchschneiden.

55. (Anschl.) Einem Kreise mit dem Radius ϱ soll ein Kreissehnenviereck umschrieben werden, von welchem der Umfang und der Winkel gegeben sind, unter dem zwei Gegenseiten sich verlängert schneiden: die Winkel des Vierecks zu bestimmen.

Gegeben $\varrho = 1$, $s = 6$, $\varepsilon = 30°$.

56. Von einem Viereck, welches centrisch ist in Beziehung auf Seiten und Ecken, gegeben die Radien r und ϱ und ein Winkel: die übrigen Winkel und die Seiten zu berechnen.

Gegeben $r = 10$, $\varrho = 7$, $\alpha = 84°$. (Determination).

57. Sind d und δ bezüglich der Durchmesser des umschriebenen und der des eingeschriebenen Kreises eines Vierecks, e und f seine Diagonalen: so soll bewiesen werden, dass

$$\frac{ef}{\delta^2} - \frac{d^2}{ef} = 1.$$

58. (Anschl.) Von einem Viereck, welches centrisch ist in Beziehung auf Seiten und Ecken, gegeben r und ϱ, die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises, und der Winkel beider Diagonalen: den Inhalt zu bestimmen.

59. (Anschl.) Wie Aufg. 58; jedoch sollen der Inhalt, der Winkel der beiden Diagonalen und r gegeben sein: den Radius ϱ zu bestimmen.

§ 30. Das allgemeine Viereck.

1. Von einem Viereck gegeben zwei anstossende Seiten und die Winkel: die fehlenden Seiten und den Inhalt zu bestimmen. Gegeben $a = 10$; $b = 18$; $(d, a) = \alpha = 120°20'$; $(a, b) = \beta = 85°$; $(b, c) = \gamma = 110°$.

2. (Anschl.) Gegeben der Inhalt eines Vierecks, zwei anstossende Seiten und die beiden ihnen anliegenden Gegenwinkel: $fl = 7$; $a = 3$; $b = 4$; $\alpha = 110°$; $\gamma = 80°$.

2a. (Anschl.) Gegeben der Inhalt eines Vierecks, zwei anstossende Seiten, der von ihnen eingeschlossene und der diesem gegenüberliegende Winkel. Gegeben $fl = 9$; $a = 3$; $b = 4$; $\beta = 70°$; $\delta = 100°$.

3. Von einem Viereck gegeben zwei anstossende Seiten und die Winkel: die mit den ersteren in derselben Ecke zusammenstossende Diagonale und den Winkel beider Diagonalen zu bestimmen.

4. Gegeben zwei Gegenseiten und die Winkel: gesucht die beiden anderen Seiten und den Inhalt.

5. Seiten und Inhalt eines Vierecks zu bestimmen, in welchem zwei Gegenseiten einander gleich sind und zugleich mit den Winkeln gegeben sind.

6. Zwischen zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks soll durch eine Linie c von gegebener Länge ein Viereck von gegebener Grösse abgeschnitten werden: welche Winkel bildet c mit den durchschnittenen Seiten?

7. Gegeben die beiden Diagonalen eines Vierecks und die Winkel, welche dieselben mit zwei Gegenseiten bilden: diese Seiten zu bestimmen.

8. Gegeben drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel: die vierte Seite, die fehlenden Winkel und den Inhalt zu bestimmen.

9. Gegeben drei Seiten und die der vierten anliegenden Winkel: gesucht die vierte Seite.

10. Gegeben zwei Gegenseiten, eine Diagonale und die Winkel der zweiten Diagonale mit den gegebenen Seiten: gesucht die zweite Diagonale.

11. Gegeben drei Seiten und zwei Gegenwinkel: gesucht die vierte Seite und die fehlenden Winkel.

12. Gegeben drei Seiten und die beiden einer derselben, und zwar einer der in ihrer Aufeinanderfolge äusseren, anliegenden Winkel: gesucht die vierte Seite und die fehlenden Winkel.

13. Gegeben die vier Seiten und ein Winkel: gesucht der Gegenwinkel und der Inhalt.

14. Gegeben die vier Seiten und der Winkel ε zweier Gegenseiten: gesucht die Winkel. Gegeben $a = 4$; $b = 5$; $c = 2$; $d = 3$; $(a, c) = \mu = 40°$.

15. (Anschl.) Gegeben zwei Gegenseiten, die beiden Diagonalen und ihr Winkel: gesucht ein Winkel des Vierecks. Gegeben $a = 6$; $c = 4{,}8$; $DB = f = 5$; $AC = e = 7$; $\lambda = 60°$.

---

16. Welche Gleichung besteht zwischen den Seiten und Diagonalen eines Vierecks?

17. (Anschl.) Von einem Viereck gegeben drei Seiten und die Diagonalen: die vierte Seite zu bestimmen, algebraisch und numerisch für die Werthe $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $e = 6$, $f = 4$.

18. (Anschl.) Das Quadrat einer Vierecksseite auszudrücken durch Vermittelung der aus den drei anderen Seiten und den beiden Diagonalen zu bildenden beiden Dreiecke.

19. (Anschl.) Die vierte Seite eines Vierecks darzustellen, wenn die aus den drei anderen Seiten und den beiden Diagonalen gebildeten beiden Dreiecke einander gleich sind.

19a. (Anschl.) Welches ist der Ausdruck für die vierte Seite eines Vierecks, wenn die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate der beiden gegebenen Gegenseiten?

20. Ueber derselben Seite $BC = a$ sind zwei Dreiecke BCA und BCA_1 errichtet, deren Winkel gegeben sind, nämlich $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$, $A_1BC = \beta_1$, $A_1CB = \gamma_1$: wie verhält sich die Verbindungslinie der Spitzen AA_1 zu BC?

21. (Anschl.) Wie Aufg. 20; jedoch soll das Verhältniss bestimmt werden von BA_0 zu CA_0, wenn A_0 der Schnittpunkt ist von AA_1 mit BC. (Vergl. § 33, Aufg. 22.)

22. (Anschl.) Ein Viereck besteht aus den über der Diagonale BC construirten Dreiecken BCA und BCA_1, deren Winkel (vergl. Aufg. 20) bekannt seien: in welchem Verhältniss werden durch die Verbindungslinie AA_1 die beiden Winkel A und A_1 getheilt?

23. (Anschl.) Ueber derselben Basis BC sind zwei Dreiecke construirt, BCA und BCA_1: den Winkel zu bestimmen, welchen die Verbindungslinie AA_1 mit BC bildet.

Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

24. Die Entfernung zu bestimmen zweier für einander unzugänglichen Punkte A und B auf dem Felde, deren Entfernungen von zwei anderen Punkten, C und D, den Stationen, man messen kann. Gegeben $CD = 307$ m; $CA = 547$ m; $CB = 985$ m; $DA = 763$ m; $DB = 725$ m.

25. Die Entfernung zu bestimmen zweier unzugänglichen Punkte A und B, welche sich von den beiden Stationspunkten C und D aus beobachten lassen. Gegeben $CD = 375$ m; $ACD = 110°$; $BCD = 37°40'$; $ADC = 38°30'$; $BDC = 117°30'$.

26. (Das Pothenot'sche Problem). Man kennt die gegenseitige Lage dreier unzugänglichen Punkte A, B, C auf dem Felde: ihre Entfernung von einem vierten Punkte D zu bestimmen, von dem aus sich die Winkel der Visirlinien nach den ersten Punkten hin messen lassen. Gegeben $BC = a = 757{,}15\,m$; $AC = b = 842{,}6$ m; $\measuredangle\, BCA = \gamma = 89°\,25{,}4'$; $\measuredangle\, BDC = \alpha = 40°\,9{,}5'$; $\measuredangle\, ADC = \beta = 45°\,9{,}1'$.

27. Wie Aufg. 26; jedoch sollen die Winkel der Visirlinien von D aus, BDC und ADC, einander gleich sein und CD den Winkel ACB in zwei Stücke theilen, welche sich wie $3:4$ verhalten. Gegeben $BC = 300$ m; $CA = 400$ m; $\gamma = 105°$ ($BCD = 45°$).

---

28. Im Viereck $ABCD$ mit den Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ mögen durch die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$ die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezüglich in die Theile $(d, e) = \alpha_1$, $(e, a) = \alpha_2$, $(a, f) = \beta_1$, $(f, b) = \beta_2$, $(b, e) = \gamma_1$, $(e, c) = \gamma_2$, $(c, f) = \delta_1$, $(f, d) = \delta_2$ zerlegt werden: nachzuweisen, dass

$$\sin\alpha_1 \,.\, \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 \cdot \sin\delta_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\delta_2.\text{*)}$$

---

*) Die Lösung der Aufgabe, aus den Winkeln α_1, β_1, γ_1, δ_1 die übrigen zu bestimmen, führt auf eine Gleichung von einem höheren Grade.

29. Gegeben eine Seite und die vier an den Endpunkten der Gegenseite liegenden Winkel des Vierecks: diese Gegenseite zu bestimmen. Gegeben (vergl. Aufgabe 28) $a = 118$, $(b, e) = \gamma_1 = 76°$, $(c, e) = \gamma_2 = 43°$, $(c, f) = \delta_1 = 32°$, $(d, f) = \delta_2 = 65°$.

30. In dem durch die Diagonale AC (Aufg. 28) vom Viereck $ABCD$ abgeschnittenen Dreieck ABC seien die Winkel gegeben, nämlich α_2, β, γ_1 und die Winkel am vierten Eckpunkt D, δ_1 und δ_2: die Winkel $DAB = \alpha$ und $DCB = \gamma$ zu bestimmen.

31. Von einem Viereck (Aufg. 28) gegeben die Winkel α_2, β, γ_1, d. h. die Winkel eines durch zwei Seiten und eine Diagonale gebildeten Dreiecks, die zweite Diagonale und die am anderen Endpunkt D derselben liegenden Winkel δ_1 und δ_2: die erste Diagonale zu berechnen. Gegeben $\alpha_2 = 50°$, $\beta = 80°$, $(\gamma_1 = 30°)$, $\delta_1 = 32°$, $\delta_2 = 28°$, $BD = f = 390$.

32. (Anschl.) Ausser den Winkeln des Dreiecks ABC, nämlich α_2, β, γ_1, seien gegeben die Winkel $\alpha_1 = (d, e)$ und $\delta_1 = (c, f)$: gesucht die Winkel $ACD = z$ und $ADB = u$.

33. (Anschl.) Ausser den Winkeln des Dreiecks ABC, nämlich α_2, β, γ_1, seien gegeben die Winkel $\beta_1 = (a, f)$ und $\delta = (c, d)$: gesucht die Winkel $(d, e) = v$ und $(c, e) = w$.

34. (Anschl.) Vom Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen AC und BD sich rechtwinklig durchschneiden, sind gegeben die Winkel des Dreiecks ABC, nämlich α_2, β, γ_1 und der Winkel $(c, d) = \delta$: die übrigen Winkel zu bestimmen.

---

35. Von einem Viereck $ABCD$ gegeben die Winkel, welche eine Seite AB mit den beiden anderen Seiten bildet, $DAB = \alpha$ und $CBA = \beta$, und mit den beiden Diagonalen, $CAB = \alpha_2$ und $DBA = \beta_1$: die übrigen Winkel der Seiten und Diagonalen zu bestimmen. Gegeben $\alpha = 120°$, $\beta = 40°$, $\alpha_2 = 100°$, $\beta_1 = 30°$.

36. (Anschl.) In welchem Verhältniss durchschneiden sich die beiden Diagonalen AC und BD im Punkte L?

37. (Anschl.) In welchem Verhältniss durchschneiden sich hinreichend verlängert die Gegenseitenpaare?

38. (Anschl.) Unter welchem Winkel schneiden sich die Gegenseitenpaare?

---

39. Von einem Viereck gegeben das Verhältniss von drei auf einander folgenden Seiten $a:b:c=\lambda:\mu:\nu$, die eingeschlossenen Winkel $(a, b)=\beta$ und $(b, c)=\gamma$ und der Inhalt $fl=g^2$: die Seiten zu bestimmen. (Vergl. Aufg. 8.)

Geg. $\lambda=1$, $\mu=2$, $\nu=3$, $g=207$, $\beta=100°$, $\gamma=110°$.

40. Gegeben das Verhältniss von drei in einem Punkte D zusammenstossenden Linien $AD:BD:CD=\lambda:\mu:\nu$ und der Winkel δ, unter welchem die beiden äusseren dieser Linien, AD und CD, zusammentreffen: die Winkel zu bestimmen der Linie BD mit AD und CD, wenn der Inhalt des Vierecks $ABCD$ so gross sein soll als das aus den Linien AD, BD, CD zu bildende Dreieck. Gegeben $\lambda:\mu:\nu=3:4:5$; $\delta=120°$.

41. Wie Aufgabe 40; jedoch soll der Winkel ABC ein rechter sein. Gegeben $\lambda:\mu:\nu=1:2:3$; $\delta=120°$.

42. Wie Aufg. 40; jedoch soll das Dreieck ABC gleichseitig sein. (Cubische Gleichung).

43. In einem Viereck sind zwei Gegenwinkel (β und δ) einander gleich und wird die zugehörige Diagonale BD durch die andere AC halbirt: die Winkel zu bestimmen, wenn die Verhältnisse der Abschnitte der Diagonalen gegeben sind:

$$AL:BL:CL:DL=\lambda:\mu:\lambda_1:\mu_1.$$

44. (Allgemeiner). Von einem Viereck gegeben die Verhältnisse der Abschnitte der beiden Diagonalen:

$$AL:CL=\lambda:\lambda_1,\quad BL:DL=\mu:\mu_1,\quad AL:BL=\lambda:\mu$$

und zwei Gegenwinkel $ABC=\beta$ und $ADC=\delta$ von gleicher Grösse: den Winkel der beiden Diagonalen zu bestimmen. (Cubische Gleichung).

(Anhang zu Cap. II, C).

§ 31. Regelmässige Vielecke, Sternvielecke.

(Vergl. § 16.)

1. Von einem regelmässigen n-Eck gegeben die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier anstossenden Seiten gleich a: den Inhalt zu bestimmen, algebraisch und numerisch für $a^2=13$ und $n=32$.

2. Von einem regelmässigen n-Eck gegeben die Verbindungslinie der Mittelpunkte einer ersten und dritten Seite (d. h. zweier Seiten mit Uebergehung der dazwischenliegenden Seite) gleich a: die Seite zu bestimmen.

3. Aus der Seite eines regelmässigen n-Ecks die Verbindungslinien zu bestimmen der Mittelpunkte einer ersten und zweiten, einer ersten und dritten, einer ersten und vierten, . . . einer ersten und $k$ten Seite, so dass zuletzt $(k-2)$ Seiten dazwischen liegen.

4. Die Summe zu bestimmen der sämmtlichen Seiten und Diagonalen eines regelmässigen Fünfecks in einem Kreise mit dem Radius r.

5. Wie Aufg. 4; jedoch soll das regelmässige Fünfeck durch ein regelmässiges Elfeck ersetzt werden.

6. Die Summe zu bestimmen der von einem Eckpunkte aus gezogenen Seiten und Diagonalen eines regelmässigen n-Ecks in einem Kreise mit dem Radius r.

7. (Anschl.) Die Summe zu bestimmen der sämmtlichen vom Mittelpunkte auf die von einem Eckpunkte aus gezogenen Seiten und Diagonalen gefällten Lothe für ein regelmässiges n-Eck, von welchem r gegeben ist.

8. Ein beliebiger Punkt P der Peripherie des einem regelmässigen n-Eck umschriebenen Kreises ist mit den sämmtlichen Ecken des n-Ecks verbunden: die Summe dieser Verbindungslinien zu bestimmen, wenn r gegeben ist und durch P der Bogen zwischen den zunächst gelegenen Ecken des Vielecks im Verhältniss von $\lambda : \mu$ getheilt wird.

9. Die Lage dreier Punkte P, A und B auf der Peripherie eines um C mit dem Radius r beschriebenen Kreises ist bestimmt durch die zugehörigen Centriwinkel $BCA = 2\beta$ und $PCA = 2\alpha$: die Länge des von P auf AB gefällten Lothes zu bestimmen.

10. (Anschl.) Von P aus sind auf die von A, einem Eckpunkte eines dem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, aus gezogenen Seiten und Diagonalen Lothe gefällt: die Summe dieser Lothe zu bestimmen, gegeben der Centriwinkel $PCA = 2\alpha$.

11. Von einem Eckpunkte eines regelmässigen Fünfecks sind Lothe auf die Seiten gefällt: die Summe dieser Lothe zu bestimmen, wenn der Radius des umschriebenen Kreises r gegeben ist.

12. Wie Aufg. 11; jedoch soll das regelmässige Fünfeck durch ein regelmässiges n-Eck ersetzt werden.

13. Von einem Punkte P der Peripherie des umschriebenen Kreises sind auf die Seiten eines regelmässigen n-Ecks Lothe gefällt: die Summe dieser Lothe zu bestimmen, wenn r gegeben ist und die Lage des Punktes P über der Seite AB bestimmt ist durch den zu AP gehörigen Centriwinkel 2α.

---

14. Durch zwei concentrische Kreise mit den Radien $r = 5$ und $\varrho = 3$ ist eine gerade Linie derartig hindurchgelegt, dass sie durch die beiden Peripherien in drei gleiche Theile getheilt ist, welche Centriwinkel gehören zu den abgeschnittenen Sehnen?

15. Wie Aufg. 14; jedoch sollen die Abschnitte der geraden Linie sich wie $\lambda : \mu : \lambda$ verhalten.

16. Gegeben der Inhalt eines regelmässigen n-Ecks gleich Δ_n: den Inhalt Δ_{2n} des regelmässigen $2n$-Ecks in demselben Kreise zu bestimmen.

17. (Anschl.) Gegeben der Inhalt eines regelmässigen n-Ecks gleich Δ_n: den Inhalt Δ_{kn} des regelmässigen kn-Ecks in demselben Kreise zu bestimmen. (Grenzfall für $k = \infty$.)

18. Gegeben der Inhalt eines regelmässigen Vielecks von n Seiten gleich Δ_n: den Inhalt des regelmässigen Vielecks von doppelter Seitenanzahl zu berechnen, dessen Seiten halb so gross sind als die des gegebenen.

19. Einem regelmässigen Vieleck ist ein Kreis eingeschrieben und ein zweiter umgeschrieben: die Breite und den Inhalt des Ringes zwischen beiden Kreisen zu berechnen, wenn die Seite des Vielecks gleich a und der zugehörige Centriwinkel 2γ gegeben sind.

20. Man kennt von einem regelmässigen $2n$-Eck die Seiten gleich a: die Seiten zu berechnen des regelmässigen eingeschriebenen n-Ecks, wenn dieselben den abwechselnden Seiten des ersteren parallel sein sollen.

21. (Anschl.) Einem regelmässigen n-Eck ist ein regelmässiges $2n$-Eck derartig umgezeichnet, dass die Seiten desselben abwechselnd denen des ersten parallel sind: die Seiten des letzteren zu berechnen aus denen des ersteren.

---

22. Gegeben die Seite eines regelmässigen n-Ecks gleich a: die erste*), zweite, dritte, u. s. w. Diagonale zu bestimmen.

23. Wenn man in den auf einander folgenden Ecken eines regelmässigen n-Ecks die ersten Diagonalen, die zweiten, die dritten u. s. w. (Aufg. 22) zieht, so schneiden sich die ersteren auf einem Kreise mit dem Radius r_1, die zweiten auf einem Kreise mit dem Radius r_2 u. s. w.: diese Radien zu bestimmen, wenn r der Radius des umschriebenen Kreises gegeben ist.

24. Den Radius des einem regelmässigen Achteck eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, wenn die ersten Diagonalen desselben die Länge a haben.

25. Die Seite eines regelmässigen n-Ecks sei gleich a gegeben: die Seiten zu bestimmen des durch die ersten Diagonalen gebildeten Vielecks.

26. Wie Aufg. 25; jedoch sollen die Seiten der durch die zweiten, durch die dritten u. s. w. Diagonalen gebildeten Vielecke bestimmt werden.

27. Der Inhalt eines regelmässigen Siebenecks ist gleich 10 gegeben: wie gross ist der Inhalt des durch die ersten Diagonalen desselben gebildeten Siebenecks?

28. Der Inhalt eines regelmässigen n-Ecks ist gleich Δ_n gegeben: wie gross ist der Inhalt $\Delta_{2,n}$ des durch zweiten Diagonalen gebildeten n-Ecks?

29. Der Inhalt eines regelmässigen Elfecks ist gleich 20 gegeben: wie gross ist der Inhalt des Kreises, welcher dem durch die dritten Diagonalen gebildeten regelmässigen Elfeck eingeschrieben ist?

30. Den Inhalt zu berechnen eines Dreiecks, welches durch eine Seite, eine erste und eine zweite Diagonale eines regelmässigen n-Ecks gebildet wird ($n > 5$); gegeben r.

31. Wie Aufg. 30; jedoch soll das Dreieck durch eine erste, eine zweite und eine dritte Diagonale im n-Eck gebildet sein: wie gross ist die Seitenzahl des Vielecks?

---

*) Als erste Diagonalen eines Vielecks werden solche bezeichnet, welche einen ersten und dritten Eckpunkt desselben (vergl. Aufg. 2) verbinden, d. h. zwei Ecken des Vielecks, zwischen denen eine dritte liegt; ebenso werden durch zweite Diagonalen Ecken verbunden, zwischen denen zwei Ecken des Vielecks liegen u. s. w. Bei einem n-Eck ist also eine $k$te Diagonale zugleich eine $(n - k - 2)$te Diagonale.

32. Wie Aufg. 30; jedoch soll das Dreieck eine λte und μte Diagonale zu Seiten haben: von welcher Ordnung ist die dritte Seite, wenn n gegeben ist, und wie gross ist die Seitenanzahl, wenn die dritte Seite des Dreiecks eine νte Diagonale sein soll?

33. (Anschl.) Den Inhalt eines Dreiecks zu bestimmen, welches innerhalb eines regelmässigen n-Ecks, von welchem r gegeben ist, durch eine λte, μte und νte Diagonale gebildet wird, wo $\lambda + \mu + \nu = n - 3$ ist.

34. (Anschl.) Den Inhalt eines Vierecks zu bestimmen, welches innerhalb eines regelmässigen n-Ecks, von welchem r gegeben ist, durch eine $\lambda_1$te, $\lambda_2$te, $\lambda_3$te, $\lambda_4$te Diagonale gebildet wird, wo $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n - 4$ ist.

35. Man kann jedes regelmässige n-Eck E, wenn $n > 4$ ist, ansehen als begrenzt durch die ersten Diagonalen eines zweiten n-Ecks E_1, dessen Ecken sich ergeben durch die Durchschneidung der verlängerten abwechselnden Seiten des ersteren. Wenn die Seite des Vielecks E gleich a gegeben ist und $\gamma = \frac{180^\circ}{n}$, so soll die Seite a_1 des äusseren Vielecks E_1 berechnet werden.

36. In einem regelmässigen n-Eck E $(n > 6)$ verlängert man die erste und vierte Seite bis zu ihrer Durchschneidung im Punkte A, und ebenso die zweite und fünfte Seite bis zur Durchschneidung in B und so allgemein jede $k$te und $(k+3)$te Seite bis zur Durchschneidung, so ist $AB = a_2$ die Seite eines neuen, dem ersten concentrischen n-Ecks E_2, dessen zweite Diagonalen durch die Seiten a des gegebenen n-Ecks E gebildet werden. Die Länge von a_2 zu bestimmen.

37. Die Seiten eines regelmässigen Sternpolygons*) bilden durch ihre Durchschneidung im Innern regelmässige Sternpolygone niederer Ordnungen: die Seiten der letzteren aus denen des ersteren zu berechnen.

---

*) Wenn man in einem regelmässigen Vieleck von ungerader Seitenzahl von einem beliebigen Eckpunkte A aus die auf einanderfolgenden ersten Diagonalen zieht, so gelangt man nach einem zweimaligen Umgange zum Anfangspunkte A zurück und erhält ein sogenanntes Sternpolygon erster Ordnung von derselben Seitenanzahl als das gegebene Vieleck. Ebenso wird durch die aufeinanderfolgenden zweiten Diagonalen eines regelmässigen Vielecks, dessen Seitenzahl n nicht durch 3 theilbar ist, nach dreimaligem Umgange ein regelmässiges Sternpolygon der zweiten Ordnung von n Seiten gebildet u. s. w.

Durch die Diagonalen eines regelmässigen Fünfecks wird höchstens ein Sternpolygon erster Ordnung gebildet, durch die des Siebenecks

38. (Allgemein). Gegeben die Seite a eines n-seitigen Sternpolygons der $k$ten Ordnung: die Seiten der inneren Polygone darzustellen.

39. Durch die $k$ten Diagonalen eines regelmässigen n-Ecks wird im innersten Cyklus ein regelmässiges n-Eck gebildet: aus der Seite a dieses letzteren die Seiten der ausserdem gebildeten Sternpolygone der verschiedenen Ordnungen zu bestimmen.

40. (Anschl.) Aus der Seite a des durch die $k$ten Diagonalen eines regelmässigen n-Ecks E_0 gebildeten inneren n-Ecks E die Seite a_0 des n-Ecks E_0 zu berechnen.

41. Die Seiten eines regelmässigen n-Ecks werden verlängert bis zur Durchschneidung mit der Seite $AB = a$: die dadurch entstehenden Abschnitte dieser Seite zu bestimmen.

42. Den Inhalt*) eines Sternpolygons erster Ordnung darzustellen, wenn die Verbindungslinie a zweier auf einander folgenden äusseren Ecken und der zu a gehörige halbe Centriwinkel $\gamma = \frac{180^\circ}{n}$ gegeben sind.

43. Wie Aufg. 42; jedoch soll der Inhalt eines Sternpolygons der zweiten Ordnung dargestellt werden.

44. Wie Aufg. 42; jedoch soll der Inhalt eines Sternpolygons der $k$ten Ordnung dargestellt werden.

---

höchstens eines der zweiten Ordnung u. s. w., allgemein wird durch die Diagonalen eines regelmässigen $(2n + 1)$ Ecks höchstens ein Sternvieleck der $(n - 1)$ten Ordnung gebildet, und zwar durch seine Diagonalen der $(n - 1)$ten Ordnung.

Ist die Seitenanzahl des gegebenen Vielecks eine zusammengesetzte Zahl, z. B. $n = l \cdot m$, so zerfällt das Sternpolygon der $(l - 1)$ten Ordnung in l m-Ecke und ebenso das Sternpolygon der $(m$-$1)$ten Ordnung in m l-Ecke, welche selbst wieder Sternpolygone von verschiedener Ordnung sein können. Beispielsweise werden bei einem regelmässigen 15-Eck durch die ersten Diagonalen ein Sternvieleck der ersten Ordnung,

durch die 2ten	Diagonalen	3 Fünfecke,
„ „ 3ten	„	ein Sternvieleck der 3ten Ordnung,
„ „ 4ten	„	5 Dreiecke,
„ „ 5ten	„	3 Sternfünfecke,
„ „ 6ten	„	ein Sternvieleck der 6ten Ordnung

gebildet.

*) Als Inhalt eines Sternpolygons soll diejenige sternförmige Figur gelten, welche von dem äusseren Umfange des Sternpolygons eingeschlossen ist, also bei einem n-seitigen Sternpolygon der $k$ten Ordnung diejenige $2n$-seitige Figur, deren n äussere Ecken die Ecken des gegebenen einfachen n-Ecks sind, deren Seiten ferner die $k$ten Diagonalen sind durch die auf einander folgenden Ecken dieses n-Ecks, je bis zu ihrer Durchschneidung in den n inneren Ecken.

45. Den Umfang zu bestimmen eines Sternpolygons, wie es in Aufgabe 42 definirt ist, und zwar

a. eines Sternpolygons der ersten Ordnung,

b. der zweiten Ordnung,

c. der *k*ten Ordnung.

46. Den Radius zu bestimmen des die inneren Ecken eines Sternpolygons der *k*ten Ordnung (Aufg. 42) enthaltenden Kreises.

47. Den Zusammenhang darzustellen zwischen dem Inhalt *fl* und dem inneren Radius r_1 (Aufg. 44) eines Sternpolygons, dessen äussere Spitzen die Ecken sind eines regelmässigen Vielecks V, während die inneren Ecken auf den Halbirungslinien der zu den Seiten des äusseren Vielecks V gehörigen Centriwinkel und auf einem concentrischen Kreise mit dem Radius r_1 liegen.

---

48. Bei einem regelmässigen n-Eck sind von den Ecken gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten, so dass ein regelmässiges $2n$-Eck entsteht: die Seite dieses $2n$-Ecks zu bestimmen, wenn die des n-Ecks gleich a gegeben ist und $\gamma = \frac{180^\circ}{n}$.

49. Die Ecken eines regelmässigen n-Ecks seien durch gleichschenklige Dreiecke in der Art abgestumpft, dass die entstehende $2n$-seitige Figur abwechselnd die Seiten a und b hat: den Inhalt und den Radius des umschriebenen Kreises dieses halbregelmässigen $2n$-Ecks zu bestimmen, wenn a, b und $n\gamma = 180^\circ$ gegeben sind.

50. Einem regelmässigen $3n$-Eck ist ein (halbregelmässiges) $2n$-Eck in der Weise eingeschrieben, dass die auf einander folgenden Seiten des letzteren die Mitten zweier abwechselnden und dann zweier auf einander folgenden Seiten des ersteren verbinden. Den Inhalt des $2n$-Ecks zu bestimmen, wenn die Seiten des $3n$-Ecks gleich a gegeben sind und $n\gamma = 60^\circ$.

---

51. Ueber der geraden Linie AB als Sehne ist mit dem Radius r ein Kreisbogen construirt, und dieser durch die Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n-1}$ in n gleiche Theile getheilt $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 \ldots = P_{n-1}B$. Es ist A mit P_{n-1} verbunden: die auf einander folgenden Stücke zu berechnen, in welche diese Verbindungslinie durch die Verbindungssehnen des Punktes B mit den Punkten P getheilt wird. Gegeben der zum $n$ten Theil des Bogens AB gehörige Peripheriewinkel γ.

52. Wie Aufg. 51; jedoch sollen die Abschnitte der Verbindungslinie AP_{n-2} durch die von B aus gezogenen Sehnen bestimmt werden.

53. (Verallgemeinert). Wie Aufg. 51; jedoch sollen die Abschnitte der Verbindungslinie AP_k durch die von B aus gezogenen Sehnen bestimmt werden.

54. Wie Aufg. 53; jedoch sollen die Abschnitte von AP_k in der Auswahl bestimmt werden, dass die zwischen den von B aus gezogenen Sehnen liegenden Bogen eine arithmetische Reihe bilden, und zwar sei B verbunden mit P_1, P_3, P_6, . . . P_m, wo $m = \frac{h(h+1)}{2}$ ist.

55. (Anschl.) Geometrisch zu interpretiren die einzelnen Summanden und die Summe der Reihe (vergl. § 7, Aufg. 34):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi\cdot\sin(\varphi+\alpha)}+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)\cdot\sin(\varphi+\beta)}+\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\varphi+\beta)\cdot\sin(\varphi+\gamma)}+\cdots$$

---

56. Ueber einer gewissen Basis $2a$ ist ein Fünfeck construirt, dessen übrige Seiten einander gleich sind: den Inhalt des Fünfecks zu berechnen, wenn die Winkel desselben an der Basis gleich α gegeben sind und die übrigen Winkel einander gleich sein sollen.

57. Wie Aufg. 56; jedoch soll das Fünfeck durch ein n-Eck ersetzt werden.

D. Zur Transversalentheorie.

§ 32. Doppelverhältnisse.

1. Sind durch einen Punkt P gerade, nach beiden Seiten hin unbegrenzte Linien gelegt, so werden durch die Schnittpunkte von je zwei derselben mit einer geraden Linie L, A und B, A und C, B und C, A und D u. s. w. geradlinige Strecken AB, AC, BC, AD u. s. w. bestimmt. Bezeichnet man die Winkel APB, APC, . . . kurz durch (AB), (AC), . . . so sollen die Brüche

$$\frac{AB}{\sin(AB)},\ \frac{AC}{\sin(AC)},\ \ldots$$

durch PA, PB, PC, . . . und das von P auf L gefällte Loth h dargestellt werden.

2. (Anschl.) Nachzuweisen, dass bei Anwendung derselben Bezeichnung wie in Aufg. 1, jede Beziehung zwischen Verhältnissen von Produkten begrenzter Strecken einer geraden Linie L, in deren Ausdrücken dieselben Buchstaben in gleicher Anzahl vorkommen, sich ungeändert auf die Sinus derjenigen Winkel übertragen lässt, unter denen von einem beliebigen Punkte P aus die entsprechenden Strecken erscheinen, — und umgekehrt. Im Besonderen also, dass folgende Beziehungen stattfinden:

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{\sin(AB) \cdot \sin(CD)}{\sin(AC) \cdot \sin(BD)};$$

$$\frac{AB \cdot AC \cdot DE}{AD \cdot AE \cdot BC} = \frac{\sin(AB) \cdot \sin(AC) \cdot \sin(DE)}{\sin(AD) \cdot \sin(AE) \cdot \sin(BC)};$$

$$\frac{AB \cdot CD + AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin(AB) \cdot \sin(CD) + \sin(AC) \cdot \sin(BD)}{\sin(AD) \cdot \sin(BC)}.$$

Vorbemerkung. Durch vier Punkte einer geraden Linie A, B, C, D sind im Ganzen sechs begrenzte Strecken bestimmt; aus diesen Strecken lassen sich drei Produkte zu zwei bilden, welche keinen Eckpunkt gemeinschaftlich haben, und aus diesen Produkten zu zwei ferner drei Quotienten, welche den entsprechenden Quotienten der Produkte der Sinus der zugehörigen Winkel, unter dem die Strecken von einem beliebigen Punkte P der Ebene aus erscheinen, (Aufg. 2) gleich sind, nämlich

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}, \quad \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}, \quad \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Jeder dieser Quotienten lässt sich ausserdem darstellen als Quotient zweier einfachen Verhältnisse von Paaren geradliniger Strecken, welche je einen Endpunkt gemeinschaftlich haben, z. B. ist

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD},$$

d. h. gleich dem Quotienten des Verhältnisses der Abstände des Punktepaares A und C von dem Punktepaar B und D. Einen solchen Quotienten der Abstände zweier Punktepaare einer geraden Linie nennt man (nach Steiner) ein Doppelverhältniss, [Doppelschnittsverhältniss (Möbius), anharmonisches Verhältniss (Chasles)] und die Punkte eines jeden Paares, — in dem gewählten Beispiel die Punkte A und C, sowie B und D — zugeordnete Punkte.

Die vier Punkte A, B, C, D lassen sich dreimal zu zwei Paaren zugeordneter Punkte zusammenstellen und gestatten demnach die Bildung von drei Doppelverhältnissen, welche sich (Aufg. 2) unmittelbar auf die Sinus der zugehörigen Winkel (AB), (AC) u. s. w. übertragen lassen.

3. (Anschl.) Die Gleichungen zwischen den Doppelverhältnissen der durch die Punkte A, B, C, D bestimmten geradlinigen Strecken und den Sinus der ihnen zugehörigen Winkel darzustellen.

4. (Anschl.) Durch einen beliebigen Punkt P seien nach den vier Punkten A, B, C, D einer geraden Linie, welche conjugirt harmonisch seien, und zwar A, B, sowie C, D als zugeordnete Punkte, gerade Linien gezogen: welche Beziehung besteht zwischen den Sinus der Winkel, welche die Linien PA und PB bezüglich mit PC und PD bilden?

5. (Anschl.) Welche Beziehung findet statt zwischen den Winkeln der Halbirungslinie des Winkels APB zweier harmonischen Strahlen mit den Strahlen PA, PB, PC, PD eines harmonischen Strahlenbündels?

6. Durch einen beliebigen Punkt P sind nach vier Punkten A, B, C, D einer geraden Linie, von denen C in der Mitte von A und B liegt, gerade Linien gezogen: das Verhältniss von $AD : BD$ durch die Sinus der Winkel auszudrücken, welche die Linien PA und PB mit PC und PD bilden.

7. (Anschl.) Durch den beliebigen Punkt P sind nach drei auf der geraden Linie L gegebenen Punkten A, B, C gerade Linien gezogen und PD parallel L: welche Beziehung findet statt zwischen den Strecken AC, BC und den Winkeln, welche PA und PB mit PC und PD bilden?

8. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen den Winkeln statt, welche die Seiten a und b eines Dreiecks mit der Mittellinie d zur Seite c und der durch C parallel zur Seite c gezogenen Linie e bilden?

9. (Anschl.) Zu beweisen, dass die nicht parallelen Seiten eines Parallelogramms und die Diagonalen ihren Richtungen nach zugeordnet harmonisch sind.

10. Wenn von den vier Linien, durch welche der Punkt P mit den Punkten A, B, C, D einer geraden Linie verbunden wird, die eine, PC, mit PA und PB gleiche Winkel bildet: welche Beziehung findet statt zwischen den Winkeln der Linie PD mit PA und PB und den Entfernungen der Punkte A und B bezüglich von C und D?

11. (Anschl.) Zu beweisen, dass die Schenkel eines Winkels und die Halbirungslinie desselben, sowie die des Nebenwinkels zugeordnet harmonische Linien sind.

12. Wenn von den Verbindungslinien eines Punktes P mit den vier Punkten A, B, C, D einer geraden Linie zwei auf einander senkrecht stehen, z. B. $PC \perp PD$: welche Beziehung findet statt zwischen den Winkeln dieser Linien bezüglich mit PA und PB und den Strecken AC und BC, AD und BD?

13. (Anschl.) Wenn von den Verbindungslinien des Punktes P mit zwei conjugirten harmonischen Punktepaaren A, B und C, D einer geraden Linie L zwei zugeordnete auf einander senkrecht stehen, z. B. $PC \perp PD$, so halbiren PC und PD den Winkel APB und seinen Nebenwinkel.

14. Die durch vier auf einander folgende Punkte A, B, C, D einer Geraden bestimmten Strecken AB, BC, CD werden von einem Punkte P aus unter demselben Winkel α gesehen: wie gross ist CD, wenn $AB = a$ und $BC = b$ gegeben sind? (Spezieller Fall $a = b$).

15. (Anschl.) Die durch fünf auf einander folgende Punkte A, B, C, D, E einer Geraden bestimmten Strecken AB, BC, CD, DE werden von P aus unter demselben Winkel α gesehen: wie gross ist DE, wenn $AB = BC = a$ gegeben ist?

16. (Anschl.) Wie Aufg. 15; jedoch sollen $AB = a$ und $BC = b$ gegeben sein.

17. (Anschl.) In welchem Verhältniss stehen die beiden Strecken CD und DE in Aufg. 16 zu einander, wenn $\frac{b}{a} = \lambda$ gegeben ist?

18. Die auf einander folgenden Stücke $AB = BC = a$ und CD einer geraden Linie werden von einem Punkte P aus bezüglich unter den Winkeln α, β, γ gesehen: die Länge von CD zu bestimmen.

19. (Anschl.) Wie Aufg. 18; jedoch sollen $AB = a$ und $BC = b$ gegeben sein.

20. Von vier äquidistanten Punkten A, B, C, D einer geraden Linie erscheinen von einem Punkte P ausserhalb die Strecken AB und BC bezüglich unter den Winkeln α und β: unter welchem Winkel erscheint von P aus die Strecke CD? (Spezielle Annahme $\alpha = \beta$).

21. Die Strecken AB, BC, CD einer geraden Linie erscheinen von einem Punkte P aus unter gleichen Winkeln α: wie gross ist die mittelste dieser Strecken, wenn die beiden äusseren gleich a gegeben sind?

22. Wie Aufg. 21; jedoch sollen die Winkel $APB = \alpha$, $BPC = \gamma$, $CPD = \alpha$ gegeben sein.

23. Ein Winkel eines Dreiecks ist in drei gleiche Theile getheilt und zwar derartig, dass die Gegenseite in die auf einander folgenden Abschnitte a, c, a zerfällt: wie gross ist der Winkel an der Spitze?

24. (Anschl.) Wie Aufg. 23; jedoch sollen die Abschnitte der Gegenseite auf einanderfolgend gleich a, b, c sein.

25. Auf einer geraden Linie L befinden sich der Reihe nach die Punkte A, B, C, D, so dass $AB = CD = a$ ist: die Entfernung der beiden mittleren Punkte zu bestimmen, wenn die Winkel gegeben sind, unter denen die Punkte von einem ausserhalb L liegenden Punkte P aus erscheinen, nämlich $APB = \alpha$; $BPC = \gamma$; $CPD = \beta$. (Vergl. Aufg. 36).

26. (Anschl.) Wie Aufg. 25; jedoch sollen $AB = a$, $CD = b$ gegeben sein. (Vergl. Aufg. 37).

27. Von einem Punkte P aus gesehen erscheinen von den Strecken $AB = a$, $BC = c$, $CD = b$ einer geraden Linie die beiden äusseren AB und CD unter gleichen Winkeln α: unter welchem Winkel erscheint von P aus die mittelste Strecke BC?

28. (Anschl.) Wie Aufg. 27; jedoch sind die Winkel $APB = \alpha$, $CPD = \beta$ gegeben.

29. Ueber den Strecken AB, BC, CD einer geraden Linie sind zwei Systeme von drei Dreiecken construirt, welche je eine gemeinschaftliche Spitze, P und Q, haben: welche Beziehung besteht zwischen Winkeln $APB = \alpha$, $BPC = \beta$, $CPD = \gamma$, $AQB = \alpha_1$, $BQC = \beta_1$, $CQD = \gamma_1$?

30. (Anschl.) Von den sechs Winkeln α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 sollen die fünf ersten gegeben sein: den sechsten zu bestimmen.

31. Ueber der Sehne BC eines Kreises sind nach entgegengesetzten Seiten zwei Dreiecke BAC und BA_1C errichtet, deren Ecken A und A_1 auf der Peripherie liegen und mit den auf der gemeinschaftlichen Seite BC liegenden Punkten D und E verbunden sind: wenn nunmehr die äusseren Winkel $BAD = \alpha$ und $EAC = \gamma$, sowie $BA_1D = \alpha_1$ und $EA_1C = \gamma_1$ gegeben sind, die inneren Winkel DAE und DA_1E zu bestimmen.

32. Der Punkt P ist mit den vier Punkten A, B, C, D einer geraden Linie verbunden, so dass Winkel $APB = \alpha$, $BPC = \gamma$, $CPD = \beta$ und $PB = \lambda \,.\, PC$ gegeben sind: das Verhältniss $AB : CD$ zu bestimmen.

33. (Anschl.) Wie Aufg. 32; jedoch ist ausser den Winkeln α, β, γ das Verhältniss $AB = \mu \cdot CD$ gegeben und das Verhältniss $PB : PC$ zu bestimmen.

34. Drei Linien AP, BP, CP schneiden sich unter den Winkeln $APB = \lambda$, $BPC = \mu$: es soll durch sie eine gerade Linie ABC gelegt werden, so dass $AB = BC$ ist: die Winkel $PAB = \alpha$, $PBC = \beta$, $PCA = \gamma$ zu bestimmen.

35. (Anschl.) Wie Aufg. 34; jedoch soll die Bedingung $AB = \delta \cdot BC$ erfüllt werden, wo $\delta \gtrless 1$ ist.

36. Vier Linien AP, BP, CP, DP schneiden sich der Reihe nach unter den Winkeln $APB = \alpha$, $BPC = \gamma$, $CPD = \beta$: welche Beziehung findet zwischen den Winkeln A, B, C, D statt, welche eine beliebige Gerade mit den vier Strahlen bildet, wenn die äusseren Abschnitte AB und CD einander gleich sein sollen? (Vergl. Aufg. 25).

37. (Anschl.) Wie Aufg. 36; jedoch soll die Bedingung $AB = \lambda \cdot CD$ erfüllt werden. (Vergl. Aufg. 26).

---

38. Wenn man von einem Punkte P aus vier gerade Linien zieht PA, PB, PC, PD, so kann man ihre Winkel, welche keinen Schenkel gemeinschaftlich haben, paarweise in drei Gruppen zusammenstellen,

$$(AB) \text{ und } (CD), \quad (AC) \text{ und } (BD), \quad (AD) \text{ und } (BC),$$

von welchen die Winkel der einen Gruppe theilweise in einandergreifen: es seien dieselben (AC) und (BD), so ist zu beweisen, dass $\sin(AC) \cdot \sin(BD) = \sin(AB) \cdot \sin(CD) + \sin(AD) \cdot \sin(BC)$.

39. (Anschl.) Aus der in Aufg. 38 dargestellten Relation die Formel für

$$\sin(\alpha + \beta), \ \cos(\alpha - \beta), \ \sin(\alpha - \beta), \ \cos(\alpha + \beta)$$

zu entwickeln.

40. (Anschl.) Es seien α, β, γ beliebige Winkel, so hat man (Vergl. § 4, Aufg. 46—50)

a. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha \cdot \sin\gamma$.
(Vergl. § 37, Aufg. 51).

b. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\beta + \gamma) - \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha \cdot \sin\gamma$.

c. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\beta + \gamma) + \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\gamma$.

d. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma) + \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\gamma$.

41. (Anschl.) Welche andere Form gewinnt der Satz in Aufg. 38, wenn man P als Punkt der Peripherie und PA, PB, PC, PD als Sehnen eines Kreises annimmt? (Ptolemäischer Satz).

42. (Anschl.) Wenn man über den Seiten und Diagonalen eines Kreissehnenvierecks Dreiecke construirt, deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt P der Ebene des Vierecks ist, so ist das Produkt der beiden Dreiecke über den Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Dreiecke über den Gegenseitenpaaren.

43. Sind A, B, C, D vier Punkte einer Kreisperipherie, so haben für einen beliebigen fünften Punkt P des Kreises die den vier Strahlen

$$PA,\ PB,\ PC,\ PD$$

zukommenden Doppelverhältnisse einen constanten Werth.

§ 33. Transversalentheorie.

Vorbemerkung.

Wenn man die Seiten einer geradlinigen Figur beliebig verlängert und durch dieselben eine unbegrenzte gerade Linie, eine Transversale, legt, so wird jede Seite in einem bestimmten Punkte, der möglichen Falls im Unendlichen liegt, durchschnitten und kommt demnach die Anzahl der Schnittpunkte mit der der Seiten der Figur überein. Man unterscheidet die Schnittpunkte als innere oder äussere, jenachdem sie auf dem Umfange der Figur selbst oder auf der Verlängerung einer Seite liegen, und rechnet die Abschnitte einer Seite jedesmal vom Schnittpunkt bis zu den auf der Seite liegenden Eckpunkten der Figur, so dass also für einen inneren Theilpunkt die Summe, für einen äusseren die Differenz der zugehörigen Abschnitte gleich der betreffenden Seite ist.

Die $2n$ Abschnitte der Seiten eines n-Ecks durch eine Transversale lassen sich in zwei Systeme von je n unterscheiden, so dass unter den Abschnitten eines jeden Systems ein Abschnitt jeder einzelnen Seite vorkommt und keine zwei einen Endpunkt gemeinschaftlich haben: die Abschnitte eines jeden so gebildeten Systems heissen Wechselabschnitte. Eine gleiche Bedeutung haben die Wechselabschnitte der Seiten einer Figur, wenn auf jeder derselben ein beliebiger Theilungspunkt angenommen ist. Sind die auf einander folgenden Seiten einer Figur AB, BC, CD, . . . LM, MN, NA und die zugehörigen Schnittpunkte der Transversalen oder die auf ihnen gegebenen Punkte A_1, B_1, C_1, .. . L_1, M_1, N_1, so sind die beiden Systeme von Wechselabschnitten

AA_1, BB_1, CC_1 . . . NN_1 und BA_1, CB_1, DC_1, . . NM_1, AN_1.

Anmerkung. Beim Dreieck bezeichnet man gern die den einzelnen Seiten zugehörigen Theilpunkte durch denjenigen mit einem Index versehenen Buchstaben, der mit dem am gegenüberliegenden Eckpunkt übereinkommt. Ist also das Dreieck etwa ABC, so wird die Transversale $A_1B_1C_1$, wo A_1 auf BC, B_1 auf CA, C_1 auf AB liegt, und die beiden Systeme von Wechselabschnitten sind dann

$$AB_1,\ BC_1,\ CA_1 \text{ und } AC_1,\ BA_1,\ CB_1,$$

also dargestellt durch Buchstabencombinationen, welche sich je aus der ersten durch cyklisches Permutiren ergeben. Ist das Dreieck ABC und die Transversale PQR, wo P auf BC, Q auf CA, R auf AB liegt, so sind die Wechselabschnitte AQ, BR, CP und AR, BP, CQ, woraus leicht ein schematisches Darstellungsgesetz abzuleiten ist.

1. Wenn auf den Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC je ein Punkt A_1, B_1, C_1 liegt und mit der zugehörigen Gegenecke verbunden wird, zu beweisen, dass das Verhältniss der Produkte der Wechselabschnitte sich ersetzen lässt durch das Verhältniss der Produkte der Sinus der über ihnen mit der Gegenecke als Scheitelpunkt verzeichneten Winkel, d. h. dass

$$\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1} = \frac{\sin ABB_1 \cdot \sin BCC_1 \cdot \sin CAA_1}{\sin ACC_1 \cdot \sin BAA_1 \cdot \sin CBB_1}.$$

2. Satz I (Menelaus). Für jede durch ein Dreieck gelegte Transversale sind die Produkte der Wechselabschnitte einander gleich

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1.$$

3. Satz II (de Ceva und Bernoulli). Wenn man die Eckpunkte eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte P der Ebene verbindet, so werden durch die Verbindungslinien, bezüglich durch deren Verlängerungen, auf den Gegenseiten Theilpunkte von der Art bestimmt, dass die Produkte der Wechselabschnitte einander gleich sind.

4. Wenn man die Eckpunkte eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte P seiner Ebene verbindet, so sind die Produkte der Sinus der Winkel, welche durch die Verbindungslinien mit den auf einander folgenden Seiten gebildet werden, wenn man diese in entgegengesetzten Cyklen verfolgt, einander gleich, d. h. es ist für das Dreieck ABC:

$$\sin PBC \cdot \sin PCA \cdot \sin PAB = \sin PCB \cdot \sin PBA \cdot \sin PAC.$$

5. Satz III (Umkehrungssatz von I und II, Aufg. 2 und 3). Wenn auf den Seiten eines Dreiecks oder auf deren Verlängerungen Punkte derartig bestimmt sind, dass die Produkte der Wechselabschnitte einander gleich sind, und es liegen von den Punkten eine gerade Anzahl (0 oder 2) auf dem Umfange, so liegen die Punkte auf einer geraden Linie, — wenn aber eine ungerade Anzahl (1 oder 3) auf dem Umfange des Dreiecks liegen, so gehen die Verbindungslinien der Punkte mit den Gegenecken durch denselben Punkt.

6. (Anschl.) Durch trigonometrische Beziehungen der Winkel- und Seitenabschnitte nachzuweisen, dass die drei Höhen eines Dreiecks durch denselben Punkt gehen.

7. Ebenso nachzuweisen, dass

a. die Halbirungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks durch denselben Punkt gehen, ebenso

b. die Halbirungslinien je eines Innenwinkels und der beiden anderen Aussenwinkel; dass

c. die Schnittpunkte der Halbirungslinien je eines Aussenwinkels und der beiden anderen Innenwinkel mit den entsprechenden Gegenseiten auf einer geraden Linie liegen;

d. ebenso die Schnittpunkte der Halbirungslinien der drei Aussenwinkel mit den Gegenseiten.

8. Nachzuweisen

a. dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte des inneren Berührungskreises eines Dreiecks mit den Gegenecken durch denselben Punkt gehen;

b. dass das Gleiche gilt für die Berührungspunkte eines jeden der drei äusseren Berührungskreise.

9. (Anschl.) Der Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten einer Dreiecksseite an den umschriebenen Kreis ist mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden: in welchem Verhältniss wird durch diese Verbindungslinie die Seite selbst getheilt?

10. Von einem beliebigen Punkte P der Peripherie des einem Dreieck umschriebenen Kreises sind auf die Seiten BC, CA, AB desselben bezüglich die Lothe PA_1, PB_1, PC_1 gefällt: die Verhältnisse zu bestimmen der durch die Fusspunkte A_1, B_1, C_1 auf den Seiten bestimmten Abschnitte und darzuthun, dass die Punkte A_1, B_1, C_1 auf einer geraden Linie liegen. Gegeben die Winkel des Dreiecks α, β, γ.

11. In der bekannten Figur zu einem Beweise des Pythagoreischen Satzes schneiden sich die Verbindungslinien der Endpunkte der Hypotenuse mit den Gegenecken der über den Katheten construirten Quadrate und das Loth vom Scheitelpunkt des rechten Winkels auf die Hypotenuse in demselben Punkte.

12. (Anschl.) Wenn man über zwei Seiten eines Dreiecks ABC als Grundlinien unter Benutzung ihrer Verlängerung Rhomben construirt, $ACDE$ und $BCFG$, und die Endpunkte der dritten Seite mit den Gegenecken der über den Gegenseiten construirten Rhomben verbindet, so schneiden sich diese Linien AG und BE im Punkte P: in welchem Verhältniss wird durch die Verbindungslinie dieses Punktes P mit dem dritten Eckpunkt C der Winkel ACB getheilt?

13. (Anschl.) Eine Seite eines Dreiecks im Verhältniss der Quadrate der anstossenden Seiten zu theilen. (Vergl. Aufg. 11).

---

14. Auf der Halbirungslinie eines Winkels (A) eines Dreiecks ABC ist ein beliebiger Punkt P mit den Endpunkten (B und C) der Gegenseite verbunden: welche Beziehung findet zwischen den Winkeln dieser Verbindungslinien mit den Dreiecksseiten statt?

15. (Anschl.) Wenn man das Dreieck ABC zum Parallelogramm $ABDC$ vervollständigt und die Verbindungslinien BP und CP bis zur Durchschneidung mit den Seiten DC und DB, bezüglich in E und F, verlängert: zu beweisen, dass $EC = BF$ ist; d. h. durch die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes P der Halbirungslinie des Winkels A (oder eines Nebenwinkels von A) eines Parallelogramms $ABDC$ mit den anliegenden Ecken B und C werden von den in der Gegenecke D zusammenstossenden Seiten des Parallelogramms Stücke abgeschnitten, welche von B und C aus gerechnet einander gleich sind.

16. (Verallgemeinert). Wenn man auf den Seiten BD und CD eines Parallelogramms $ABCD$ oder auf deren Verlängerungen von den Gegenecken B und C aus Stücke abträgt, welche ein gegebenes Verhältniss haben

$$BF : CE = \lambda : \mu,$$

so schneiden sich die Verbindungslinien BE und CF in einem Punkte P einer bestimmten durch den Eckpunkt A gehenden Linie, welche den Winkel so theilt, dass

$$\sin BAP : \sin CAP = \lambda : \mu;$$

wenn BF und CE auf entgegengesetzten Seiten der Diagonale BC liegen, so theilt AP den Nebenwinkel von BAC so, dass $\sin BAP : \sin CAP = \lambda : \mu$.

17. Einen gegebenen Winkel BAC so zu theilen, dass sich $\sin PAB : \sin PAC = \lambda : \mu$ verhält.

---

18. Wenn man durch ein Dreieck (ABC) eine Transversale legt $(A_1B_1C_1)$, so durchschneiden sich die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier Seiten mit den Gegenecken (AA_1, BB_1) in einem neuen Punkte P, dessen Verbindungslinien mit dem dritten Eckpunkte C, nöthigenfalls verlängert, die dritte Seite AB im Punkte C_2 durchschneiden mag, so ist durch C_1 und C_2 als zugeordnete Punkte die Seite AB harmonisch getheilt.

19. (Anschl.) Gegeben drei Punkte einer geraden Linie: mit dem Lineal zu einem beliebigen derselben in Beziehung auf die beiden anderen den conjugirten harmonischen Punkt zu construiren.

20. (Anschl.) Gegeben drei sich in demselben Punkte schneidende Linien: mit dem Lineal zu einer beliebigen derselben in Beziehung auf die beiden anderen den zugeordneten harmonischen Strahl zu construiren.

21. (Anschl.) In einem vollständigen Vierseit*) wird jede der drei Diagonalen durch die beiden anderen in Punkten durchschnitten, welche zugeordnet harmonisch sind zu den auf der betreffenden Diagonale liegenden Ecken des Vierseits.

22. Ueber derselben Seite BC sind zwei Dreiecke BCA_1 und BCA_2 errichtet: in welchem Verhältniss wird durch die Verbindungslinie der beiden Spitzen A_1 und A_2 die gemeinschaftliche Basis getheilt, wenn die Winkel der beiden Dreiecke BCA_1 und BCA_2 gegeben sind? (Vergl. § 30, Aufg. 21).

23. (Anschl.) Ueber einer und derselben Basis BC sind drei Dreiecke BCA_1, BCA_2, BCA_3 errichtet, welche Beziehung findet zwischen den Basiswinkeln β_1 und γ_1, β_2 und γ_2, β_3 und γ_3 der Dreiecke statt, wenn die Spitzen A_1, A_2, A_3 auf derselben geraden Linie liegen sollen?

---

*) Als vollständiges Vierseit wird ein solches bezeichnet, dessen Gegenseitenpaare bis zu ihrer Durchschneidung verlängert sind; die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte gilt ebenfalls als eine Diagonale.

24. (Anschl.) Die Gegenseitenpaare eines Kreissehnenvierecks $ABCD$ schneiden sich, AB und CD in E, AD und BC in F, die inneren Diagonalen AC und BD in G. Legt man in den Eckpunkten A, B, C, D Tangenten an den Kreis, so bilden diese ein dem Kreise umschriebenes Viereck $A_1B_1C_1D_1$, dessen Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 bezüglich über den Seiten AB, BC, CD, DA liegen mögen. Es soll bewiesen werden, dass die Diagonale B_1D_1 des Tangentenvierecks durch die Punkte G und E gehen.

25. (Anschl.) Die Linie B_1D_1 ist der geometrische Ort für die zu F conjugirten harmonischen Punkte auf den durch F gelegten Sekanten in Beziehung auf die Schnittpunkte dieser Sekanten mit dem Kreise. B_1D_1 heisst die Polare des Punktes F in Beziehung auf den Kreis und F der Pol der Linie B_1D_1.

26. (Anschl.) Die Tangente von einem Punkte ausserhalb eines Kreises nur vermittelst des Lineals zu construiren.

27. (Anschl.) Die Tangente an einen Punkt des Kreises selbst vermittelst des Lineals zu construiren.

28. (Anschl.) Ebenso die Polare eines Punktes in Beziehung auf den Kreis zu construiren.

29. (Anschl.) Ebenso den Pol einer Linie in Beziehung auf den Kreis.

30. (Das Pascal'sche Sechseck). Gegeben ein Kreis mit dem Radius r und ein Dreieck ABC, dessen Seiten BC, CA, AB bezüglich den Kreis durchschneiden mögen in den Punkten A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2. Es mögen zu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 bezüglich die Centriwinkel $2\alpha_1$, $2\beta_1$, $2\gamma_1$ gehören. Ferner seien die Sehnen B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1 gezogen, bezüglich mit den Centriwinkeln $2\alpha_2$, $2\beta_2$, $2\gamma_2$, so wird durch die auf einander folgenden Punkte $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ ein dem Kreise eingeschriebenes Sechseck bestimmt. Es soll bewiesen werden, dass die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare

$$A_1A_2 \text{ und } B_2C_1,\ B_1B_2 \text{ und } C_2A_1,\ C_1C_2 \text{ und } A_2B_1,$$

nämlich A_0, B_0, C_0, auf derselben geraden Linie liegen, — und zwar durch Bestimmung der Abschnitte der Seiten des Dreiecks ABC durch den Kreis und die Punkte A_0, B_0, C_0. (Siehe die Vorbemerkung.)

Anmerkung. Bestätigung der Sätze $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$ u. s. w. ferner für die Transversalen $A_0B_2C_1$, $B_0C_2A_1$, $C_0A_2B_1$ und das Dreieck ABC (Satz I, Aufg. 2).

31. Auf den Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC sind in den Punkten A_1, B_1, C_1 Lothe errichtet: den Inhalt des von diesen Lothen begrenzten Dreiecks zu bestimmen, wenn $BC_1 = a_1$, $CA_1 = b_1$, $AB_1 = c_1$; $CB_1 = a_2$, $AC_1 = b_2$, $BA_1 = c_2$ gegeben sind.

32. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen den durch drei auf den Seiten eines Dreiecks liegenden Punkte bestimmten Seitenabschnitten statt, wenn die in ihnen errichteten Lothe durch denselben Punkt gehen sollen?

33. (Anschl.) Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichteten Lothe durchschneiden sich in demselben Punkte.

34. (Anschl.) Wenn sich drei Kreise zu zwei berühren, so gehen die in den Berührungspunkten auf den zugehörigen Centralen errichteten Lothe durch denselben Punkt: die Berührung mag von Aussen oder theilweise von Innen stattfinden.

35. (Anschl.) Um die Ecken eines Dreiecks als Mittelpunkte sind Kreise mit beliebigen Radien construirt, welche sich zu zwei durchschneiden: zu beweisen, dass die gemeinschaftlichen Sehnen dieser Kreise durch denselben Punkt gehen. (Wenn sich die Kreise nicht durchschneiden, so treten an Stelle der gemeinschaftlichen Sehnen die Linien der gleichen Potenzen.)

36. Ueber den Seiten des Dreiecks ABC seien (nach Aussen hin) die Dreiecke BA_0C, CB_0A, AC_0B errichtet, und zwar so dass

$$AB_0 = AC_0 = a_0,\ BC_0 = BA_0 = b_0,\ CA_0 = CB_0 = c_0$$

ist: es soll bewiesen werden, dass die von A_0, B_0, C_0 auf die Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks gefällten Lothe durch denselben Punkt P_0 gehen. (Netz des Tetraeders, Fusspunkt der Höhe.)

37. (Anschl.) Welche Lage hat der Punkt P_0, wenn $a_0^2 + a^2 = b_0^2 + b^2 = c_0^2 + c^2$ ist?

38. (Anschl.) Welche Lage hat der Punkt P_0, wenn die äusseren Dreiecke (Aufg. 36) dem inneren congruent sind, und zwar $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$?

39. Die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC sind auf einander folgend durch die Punkte A_1, B_1, C_1 im Verhältniss von $\lambda : \mu$ getheilt und in den Theilpunkten sind Lothe errichtet: wie verhalten sich die Seiten des durch diese Lothe gebildeten Dreiecks zu den entsprechenden Seiten des gegebenen, wenn die Winkel des Dreiecks ABC gegeben sind?

40. Wie Aufg. 39; jedoch sollen die Theilungspunkte A_1, B_1, C_1 durch die ihnen conjugirt harmonischen Punkte A_2, B_2, C_2 auf den zugehörigen Seiten ersetzt werden.

41. Einem Dreieck ABC ist ein zweites $A_0B_0C_0$ eingezeichnet, dessen Seiten auf denen des ersteren senkrecht stehen: in welchem Verhältniss werden durch die Ecken A_0, B_0, C_0 des letzteren die Seiten BC, CA, AB getheilt?

---

42. Durch drei Punkte einer geraden Linie L, M, N sind drei gerade Linien gezogen, welche mit ihr bezüglich die Winkel

$$(LB,\ LM) = \lambda,\ (MC,\ MN) = \mu,\ (NA,\ NL) = \gamma$$

bilden: ferner seien gegeben

$$MN = l,\ NL = m,\ LM = n,$$

so dass

$$l + m + n = 0:$$

durch l, m, n, λ, μ, ν auszudrücken die Seiten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ des durch die drei Linien gebildeten Dreiecks, sowie den Inhalt dieses Dreiecks.

43. (Anschl.) Welche geometrische Bedeutung hat in Aufg. 42 der Ausdruck

$$l \cdot \cos(\mu + \nu - \lambda) + m \cos(\nu + \lambda - \mu) + n \cdot \cos(\lambda + \mu - \nu)?$$

44. (Anschl.) Die Bedingung anzugeben dafür, dass die drei durch L, M, N gezogenen Linien durch denselben Punkt gehen.

45. Durch die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks sind die geraden Linien AA_1, BB_1, CC_1 gezogen, welche die Dreieckswinkel bezüglich in die Stücke α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 theilen, so dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,\ \beta_1 + \beta_2 = \beta,\ \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma:$$

die Abschnitte der Seiten zu bestimmen.

46. (Anschl.) Wenn die Linien AA_1, BB_1, CC_1 bei ihrer Durchschneidung das Dreieck $A_0B_0C_0$ bilden, wo A_0 der Schnittpunkt ist von BB_1 und CC_1 u. s. w., so soll der Werth des Verhältnisses

$$\frac{AB_0 \cdot BC_0 \cdot CA_0}{AC_0 \cdot BA_0 \cdot CB_0}$$

durch die Winkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 bestimmt werden.

47. (Anschl.) Wie Aufg. 46; jedoch soll der Werth des Verhältnisses

$$\frac{A_1B_0 \cdot B_1C_0 \cdot C_1A_0}{A_1C_0 \cdot B_1A_0 \cdot C_1B_0}$$

bestimmt werden.

48. (Anschl.) Die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ darzustellen.

49. (Anschl.) Welche geometrische Bedeutung kommt dem Ausdruck zu:

$$\cos A_1 \cdot \sin(\beta_1 + \gamma_2) + \cos B_1 \cdot \sin(\gamma_1 + \alpha_2) + \cos C_1 \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_2)?$$

50. (Anschl. an Aufg. 45). Die Verhältnisse darzustellen der Dreiecke

$$AB_1C_1 = \Delta_A,\ BC_1A_1 = \Delta_B,\ CA_1B_1 = \Delta_C$$

zu dem gegebenen Dreieck $ABC = \Delta$ vermittelst der Winkel A_1, B_1, C_1, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2.

51. (Anschl.) Das Verhältniss der beiden Dreiecke $A_1B_1C_1 = \Delta_1$ und ABC durch Vermittelung derselben Winkel darzustellen.

52. (Anschl.) Welche Beziehung findet zwischen den Winkeln α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 statt, wenn die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 auf einer geraden Linie liegen sollen?

§ 34. Die besonderen Punkte des Dreiecks.

1. In welchem Verhältniss werden durch die (verlängerten) Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises die Gegenseiten getheilt?

2. (Anschl.) Sind A_1, B_1, C_1 die Theilpunkte, so sollen die Eckdreiecke B_1AC_1, C_1BA_1, A_1CB_1 und das Mitteldreieck $A_1B_1C_1$ durch das Dreieck ABC und die Winkel α, β, γ bestimmt werden.

3. (Anschl.) In welchem Verhältniss werden durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises die Linien AA_1, BB_1, CC_1 getheilt?

4. (Anschl.) Wie lang sind die Linien AA_1, BB_1, CC_1 und ihre Verlängerung über die Gegenseite bis zur Peripherie des umschriebenen Kreises, und die Verbindungslinien der den Eckpunkten A, B, C entgegengesetzten Endpunkte der Durchmesser des umschriebenen Kreises mit den Eckpunkten?

5. Die Halbirungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks bis zur Gegenseite zu bestimmen, so wie das Verhältniss ihrer Abschnitte durch den inneren Berührungskreis, wenn r und die Winkel des Dreiecks gegeben sind. (Vergl. §37, Aufg. 31—33).

6. Wie Aufg. 5; jedoch sollen die Halbirungslinien der Innenwinkel bis zu dem auf ihnen liegenden Mittelpunkte eines äusseren Berührungskreises bestimmt werden.

7. Wie Aufg. 5; jedoch sollen die Halbirungslinien der Aussenwinkel bis zur Gegenseite, sowie das Verhältniss ihrer durch die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise bestimmten Abschnitte dargestellt werden.

8. Wie Aufg. 5; jedoch sollen die Verbindungslinien der Mittelpunkte N, N_a, N_b, N_c der vier Berührungskreise bestimmt werden.

9. (Anschl.) Die Radien zu bestimmen der vier Kreise, welche den durch die Mittelpunkte der vier Berührungskreise N, N_a, N_b, N_c als Eckpunkte bestimmten Dreiecken umschrieben sind.

10. (Anschl.) Zu beweisen, dass die Radien der umschriebenen Kreise der drei durch je zwei obere Höhenabschnitte und eine Seite gebildeten Dreiecke gleich sind dem Radius des dem gegebenen Dreieck selbst umschriebenen Kreises und doppelt so gross sind als der Radius des dem Fusspunktsdreieck umschriebenen Kreises.

11. (Anschl. an Aufg. 5.) Den Inhalt zu bestimmen desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Schnittpunkte sind der inneren Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks ABC mit den Gegenseiten A_1, B_1, C_1.

12. (Anschl. an Aufg. 7.) Den Inhalt zu bestimmen des Dreiecks $A_1B_2C_2$, dessen Ecken die Schnittpunkte sind der inneren Halbirungslinie des Winkels A mit der Seite a und der Halbirungslinien der Aussenwinkel B und C mit b und c.

13. (Anschl.) Die Inhalte zu bestimmen derjenigen Dreiecke, welche den Mittelpunkt eines der vier Berührungskreise und zwei Ecken des Dreiecks zu Eckpunkten haben.

14. (Anschl.) Die Inhalte zu bestimmen derjenigen vier Dreiecke, welche die Mittelpunkte der Berührungskreise zu Eckpunkten haben: gegeben der Inhalt Δ und die Winkel des Dreiecks.

15. Die Inhalte zu bestimmen derjenigen Dreiecke, welche durch zwei Berührungspunkte des inneren Berührungskreises und einen Eckpunkt des gegebenen Dreiecks, bezüglich durch alle drei Berührungspunkte als Eckpunkte bestimmt werden.

16. Die analoge Aufgabe für einen der äusseren Berührungskreise.

17. Das Verhältniss darzustellen der Radien der vier Berührungskreise eines Dreiecks zum Radius des umschriebenen Kreises.

18. Zu beweisen, dass die Summe der Radien der drei äusseren Berührungskreise gleich ist der Summe aus dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem Radius des inneren Berührungskreises.

19. (Anschl.) Zu beweisen, dass die Summe der drei Dreiecke, welche die Berührungspunkte der äusseren Berührungskreise zu Eckpunkten haben (Aufg. 16), gleich ist der Summe aus dem durch die Berührungspunkte des inneren Berührungskreises mit den Seiten als Ecken bestimmten Dreieck (Aufg. 15) und dem doppelten Inhalt des Dreiecks selbst.

20. (Anschl.) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist das Dreieck, dessen Ecken die Berührungspunkte sind des die Hypotenuse von Aussen berührenden Kreises, gleich der Summe der drei Dreiecke, welche die Berührungspunkte der die Katheten von Aussen berührenden Kreise und die des inneren Berührungskreises zu Ecken haben.

---

21. Der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises N sei mit den Ecken des Dreiecks ABC verbunden: es sollen die Radien r_a, r_b, r_c der den Dreiecken BCN, CAN, ABN umschriebenen Kreise durch r und die Winkel des Dreiecks ABC bestimmt werden.

22. (Anschl.) Das Produkt der Radien der drei den Dreiecken BCN, CAN, ABN umschriebenen Kreise durch die Radien r und ϱ des Dreiecks selbst auszudrücken.

23. (Anschl.) Zu beweisen, dass die Produkte

$$AN \cdot r_a = BN \cdot r_b = CN \cdot r_c = 2r\varrho.$$

---

24. Den Inhalt zu bestimmen derjenigen vier Dreiecke, welche durch die Fusspunkte der Höhen zu zwei und einen Eckpunkt des gegebenen Dreiecks, sowie durch die drei Fusspunkte selbst als Eckpunkte bestimmt werden.

25. (Anschl.) Den Umfang s_0 zu bestimmen des Fusspunktsdreiecks; — zu beweisen, dass die Proportion stattfindet

$$s_0 : s = \varrho : r; \quad \text{ebenso dass } s_0 \cdot \Delta = h_1 \,.\, h_2 \cdot h_3.$$

26. (Anschl.) Den Radius ϱ_0 des inneren Berührungskreises des Fusspunktsdreiecks $A_0B_0C_0$ durch r und die Winkel des gegebenen Dreiecks auszudrücken.

27. (Anschl.) Zu beweisen, dass die Summe der Quadrate der Seiten eines Dreiecks gleich ist $4r\,(2r + \varrho_0)$, wo ϱ_0 die in Aufg. 26 angegebene Bedeutung hat.

27a. (Anschl.) Ebenso, dass die Summe der Quadrate der Radien der vier Berührungskreise eines Dreiecks gleich ist $4r\,(2r - \varrho_0)$.

28. Ist H_0 der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks, so ist zu beweisen, dass

a. $AH_0 + BH_0 + CH_0 = 2(r+\varrho)$.

b. $AH^2_0 + BH^2_0 + CH^2_0 = 4r(r - \varrho)$.

c. $AH_0 \cdot A_0H_0 = BH_0 \cdot B_0H_0 = CH_0 \cdot C_0H_0 = 2r \cdot \varrho_0$.

d. $AH_0 \cdot BH_0 \cdot CH_0 = 4r^2 \ \varrho_0$.

e. $A_0H_0 \cdot B_0H_0 \cdot C_0H_0 = 2r \cdot \varrho^2{}_0$, wo ϱ_0 den Radius des inneren Berührungskreises des Fusspunktsdreiecks $A_0B_0C_0$ bedeutet (Aufg. 26).

29. Sind $MA_3 = p_a$, $MB_3 = p_b$, $MC_3 = p_c$ die Lothe, vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten und r_a', r_b', r_c' die Radien der den Dreiecken BMC, CMA, AMB bezüglich umschriebenen Kreise, so ist zu beweisen, dass

a. $p_a + p_b + p_c = r + \varrho$.

b. $p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 = r(r - \varrho_0)$ (Aufg. 26).

c. $2p_a \cdot p_b \cdot p_c = r^2 \ \varrho_0$ (Vergl. Aufg. 28d.)

d. $r_a' \cdot p_a = r_b' \cdot p_b = r_c' \cdot p_c = \frac{r^2}{2}$.

e. $r_a' \cdot AH_0 = r_b' \cdot BH_0 = r_c' \cdot CH_0 = r^2$ (Aufg. 28).

---

30. Zu beweisen, dass zwischen der Centrale d des umschriebenen und des inneren Berührungskreises und den Radien r und ϱ dieser beiden Kreise die Beziehung stattfindet:

$$d^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

31. (Anschl.) Sind d_a, d_b, d_c bezüglich die Centralen der drei äusseren Berührungskreise und des umschriebenen Kreises, zu beweisen, dass **a.** $d_a^2 = r^2 + 2r\varrho_a$, u. s. w.

b. $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12r^2$.

32. Wird durch H_0 der Höhenschnittpunkt, durch M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, durch N der des inneren Berührungskreises, durch ϱ_0 der Radius des inneren Berührungskreises für das Fusspunktsdreieck (Aufg. 26) bezeichnet, zu beweisen, dass **a.** $H_0N^2 = 2\varrho^2 - 2\varrho_0 r$; **b.** $H_0M^2 = r^2 - 4\varrho_0 r$.

33. Der Schwerpunkt (Durchschnittspunkt der drei Mittellinien) M_0 eines Dreiecks liegt auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes M des umschriebenen Kreises und des Höhenschnittpunktes und zwar so, dass $MM_0 : M_0H_0 = 1 : 2$.

34. (Anschl.) Zu beweisen, dass

$$M_0N^2 = \tfrac{2}{9} r(2r + \varrho_0) - \tfrac{2}{3}\varrho(2r - \varrho).\text{*)}$$

---

*) Die Aufgaben 32 — 34 und die Mehrzahl der vorhergehenden Aufgaben dieses Paragraphen rühren von Feuerbach (Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks u. s. w. 1822) her.

35. Welche trigonometrische Beziehung findet zwischen den Winkeln statt, welche die drei Mittellinien eines Dreiecks mit den Gegenseiten bilden?

36. Die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC sind im Cyklus aufeinanderfolgend durch die Punkte A_1, B_1, C_1 im Verhältniss von $\beta_1 : \gamma_1$, $\gamma_1 : \alpha_1$, $\alpha_1 : \beta_1$ getheilt: welche Beziehung findet zwischen den Winkeln statt, welche die Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1 bezüglich mit den Wechselabschnitten der Seiten BC, CA, AB bilden?

37. Die Winkel des Dreiecks ABC sind durch die Linien AA_1, BB_1, CC_1 derartig getheilt, dass die Sinus der Theilwinkel der Reihe nach im Cyklus sich verhalten wie $\sin\beta_1 : \sin\gamma_1$, $\sin\gamma_1 : \sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1 : \sin\beta_1$: den Inhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ darzustellen.

---

38. (Satz von Gauss*) über die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks.) Man nehme auf den Mittellinien AA_0, BB_0, CC_0 („vorwärts oder rückwärts verlängert, wenn es nöthig ist") von A, B, C ab gezählt Stücke AA_1, BB_1, CC_1, welche jenen respective proportional sind, so dass also

$$A_1A_0 = \lambda \cdot AA_0,\ B_1B_0 = \lambda \cdot BB_0,\ C_1C_0 = \lambda \cdot CC_0,$$

wo λ negativ ist, wenn die Punkte A_1, B_1, C_1 auf den über die Gegenseite verlängerten Mittellinien liegen, so gehen die von A_1, B_1, C_1 bezüglich auf BC, CA, AB gefällten Lothe durch denselben Punkt P_1. (Welche Bedeutung hat dieser Punkt P_1 für die besonderen Werthe $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $\lambda = 0$?)

39. (Verallgemeinerung). Der Gauss'sche Satz lässt sich, wie folgt, aussprechen: Wenn man vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises Lothe auf die Seiten eines Dreiecks fällt und auf den Verbindungslinien AA_0, BB_0, CC_0 der Ecken mit den Fusspunkten dieser Lothe die Stücke AA_1, BB_1, CC_1 annimmt u. s. w. Es soll der folgende allgemeinere Satz bewiesen werden:

Wenn man von einem beliebigen Punkte P_0 der Ebene Lothe fällt auf die Seiten eines Dreiecks und die Fusspunkte A_0, B_0, C_0 mit den Gegenecken A, B, C verbindet, ferner auf AA_0, BB_0, CC_0 Punkte A_1, B_1, C_1 bestimmt, so dass

$$A_1A_0 = \lambda \cdot AA_0,\ B_1B_0 = \lambda \cdot BB_0,\ C_1C_0 = \lambda \cdot CC_0,$$

so gehen die von A_1, B_1, C_1 auf BC, CA, AB gefällten Lothe durch denselben Punkt P_1, welchen positiven oder negativen (vergl. Aufg. 38) Werth λ auch haben mag.

---

*) Mitgetheilt durch Schumacher 1810 in seiner Uebersetzung der Géométrie de position von Carnot. Siehe auch C. Fr. Gauss Werke, Bd. IV pag. 393—396.

40. (Hilfsaufgabe.) Gegeben zwei beliebige begrenzte gerade Linien A_1A_2, B_1B_2: dieselben seien bezüglich durch die Punkte A_k und B_k in gleichem Verhältniss getheilt, so dass also

$$A_1A_k = \lambda \cdot A_1A_2 \text{ und } B_1B_k = \lambda \cdot B_1B_2,$$

so durchschneiden sich bei verschiedenen Werthen von λ die in den zugehörigen Punkten A_k und B_k auf A_1A_2 und B_1B_2 errichteten Lothe in Punkten einer geraden Linie. (An Stelle der in den Punkten A und B errichteten Lothe können auch Systeme von parallelen Linien treten.)

41. (Anschl. an Aufg. 39). Der Schnittpunkt P_1 der von den Punkten A_1, B_1, C_1 auf die Seiten BC, CA, AB gefällten Lothe liegt auf der Verbindungslinie des Punktes P_0 mit dem Höhenschnittpunkte P_3 oder H_0.

Cap. III.

Angewandte Aufgaben.

§ 35. Bestimmung grösster und kleinster Werthe.

1. Welches von allen Dreiecken, in denen zwei Seiten gegebene Werthe haben, hat den grössten Inhalt?

2. (Anschl.) Von allen Parallelogrammen mit gegebenen Diagonalen dasjenige zu bestimmen, welches den grössten Inhalt hat.

3. (Anschl.) Von allen Vierecken mit gegebenen Diagonalen dasjenige zu bestimmen, dessen Inhalt möglichst gross ist.

4. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck $\sin x + \cos x$ ein Maximal-, bezüglich ein Minimalwerth?

5. Von allen über derselben Hypotenuse beschriebenen Dreiecken dasjenige zu bestimmen, welches den grössten Umfang hat.

6. Einem Kreise mit gegebenem Radius ein möglichst grosses Rechteck einzuschreiben.

7. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck $\sin x^n + \cos x^n$ möglichst gross?

8. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken, welche dieselbe Höhe (zur Hypotenuse) haben, dasjenige zu bestimmen, welches die kleinste Kathetensumme, bezüglich den kleinsten Inhalt besitzt.

9. Einem Quadrat ein möglichst grosses gleichschenkliges Dreieck in der Weise einzuzeichnen, dass die Spitze desselben in einer Ecke des Quadrates, die Endpunkte der Basis auf den Gegenseiten liegen.

10. Welches ist der grösste Werth des Ausdrucks

$$a \sin x + b \cos x?$$

11. (Anschl.) Durch den Scheitelpunkt des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks eine gerade Linie zu ziehen von der Art, dass die Summe der Projektionen beider Katheten auf sie möglichst gross wird.

12. (Allgemeiner.) Durch einen Eckpunkt eines Dreiecks eine gerade Linie zu ziehen von der Art, dass die Summe der Projektionen der beiden anderen Seiten auf sie möglichst gross wird.

13. Für welchen Werth von x erhält der Ausdruck

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x$$

seinen kleinsten Werth, und wie gross ist dieser?

14. (Anschl.) Durch einen Eckpunkt A eines Rechtecks eine gerade Linie zu ziehen, welche von den Gegenseiten Stücke abschneidet, die von den in A zusammenstossenden Seiten aus gerechnet, eine möglichst kleine Summe ergeben.

15. Für welchen Werth des Verhältnisses $\frac{\sin x}{\sin y}$ erreicht der Ausdruck

$$\frac{a \sin x}{\sin y} + \frac{b \sin y}{\sin x}$$

seinen kleinsten Werth?

16. (Anschl.) Wie Aufgabe 14; jedoch soll das Rechteck durch ein Parallelogramm ersetzt werden.

17. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

ein Maximum oder Minimum?

18. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck

$$\sin x + \cos x + 2 \sin 2x$$

ein Maximum?

19. (Anschl.) Ueber einer gegebenen geraden Linie ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, in welchem die Summe der beiden Katheten und des Lothes auf die Hypotenuse möglichst gross ist.

20. Einen gegebenen Winkel α in zwei Theile zu theilen, für welche die Summe der Sinus möglichst gross wird.

21. Einen gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel in einen Kreis einzutragen, so dass die Summe der ihn einschliessenden Sehnen möglichst gross wird.

22. Einen gegebenen Winkel α in zwei Theile zu theilen, für welche die Summe der Tangenten möglichst klein ist.

23. Wie Aufg. 22; jedoch soll das Produkt der Tangenten der Theile des Winkels α möglichst gross sein.

24. (Anschl.) Einem Kreise mit dem Radius ϱ ist ein Dreieck umgeschrieben, von welchem ein Winkel gegeben ist: wie gross müssen die beiden anderen Winkel sein, wenn das Dreieck einen möglichst kleinen Umfang (und demnach auch möglichst kleinen Inhalt) haben soll?

25. (Anschl.) Einem gegebenen Kreise ein möglichst kleines Dreieck umzuschreiben.

26. Einem gegebenen Kreise ein möglichst grosses Dreieck einzuzeichnen.

27. Einem gegebenen Halbkreise ist ein Dreieck derartig umzuschreiben, dass eine Seite desselben den Durchmesser enthält: die Winkel zu bestimmen, damit der Inhalt des Dreiecks möglichst klein ist. (Vergl. Aufg. 46).

28. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck

$$\cos x^2 + \alpha^2 \cdot \sin 2x$$

möglichst gross?

29. Ein Sechseck besteht aus einem Rechteck mit den Diagonalen d und zwei auf zwei Gegenseiten des letzteren als Diagonalen aufgesetzten halben Quadraten: den Winkel der beiden Diagonalen d zu bestimmen, damit der Inhalt des Sechsecks möglichst gross ist.

30. Den Winkel α in zwei Theile zu zerlegen, für welche die Summe der reciproken Werthe der Sinus ein Minimum wird.

31. (Anschl.) Die Winkel eines Vierecks zu bestimmen, welches centrisch ist in Beziehung auf Seiten und Winkel und möglichst klein sein soll, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben ist.

32. Einem Kreise mit dem Radius ϱ ist ein möglichst kleines Viereck umzuschreiben, von welchem ein Winkel gleich α gegeben ist und dem sich zugleich ein Kreis umschreiben lässt.

33. (Anschl.) Das umschriebene Viereck soll ein Maximum werden, wenn der eingeschriebene Kreis mit dem Radius ϱ zwei Seiten desselben von Aussen berührt.

34. Einem Kreise mit dem Radius ϱ ist ein Viereck umgeschrieben, von welchem zwei Winkel gleich α und β gegeben sind: die beiden fehlenden Winkel zu bestimmen, wenn das Viereck möglichst klein sein soll.

35. Von einem Viereck, welches centrisch in Beziehung auf Seiten und Ecken ist, und von welchem ein Winkel gleich α gegeben ist: die übrigen Winkel zu bestimmen, so dass das Viereck bei gegebenem Umfange möglichst klein ist.

36. Unter welcher Bedingung hat ein Viereck, von welchem die Seiten gegeben sind, einen möglichst grossen Inhalt?

37. Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes, welches einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben ist, durchschneiden sich hinreichend verlängert unter dem Winkel 2α: den zu den nicht parallelen Seiten gehörigen Centriwinkel zu bestimmen, wenn das Trapez möglichst gross sein soll, und den Inhalt dieses Trapezes.

38. Wie Aufg. 37; jedoch soll der Umfang des Trapezes möglichst gross sein und alsdann berechnet werden.

39. Einem Kreisausschnitt BAC, der zum Centriwinkel α gehört, ist ein Rechteck einzuschreiben von möglichst grossem Inhalt, von welchem ein Eckpunkt P auf dem Bogen BC liegen soll: den zum Bogen BP gehörigen Centriwinkel zu bestimmen.

40. Wie Aufg. 39; jedoch soll der Umfang des Rechtecks möglichst gross sein.

41. Wie Aufg. 39; jedoch sollen zwei Eckpunkte P und Q des einzuschreibenden Rechtecks auf dem Bogen BC liegen.

42. Wie Aufg. 40; jedoch sollen zwei Eckpunkte P und Q des einzuschreibenden Rechtecks auf dem Bogen BC liegen.

43. Einem Dreieck ABC ein zweites möglichst kleines Dreieck $A_1B_1C_1$ einzuzeichnen, wenn die Lage des Eckpunktes A_1 auf BC und der Winkel $B_1A_1C_1$ gleich α_1 gegeben sind; $BA_1 = c_1$, $CA_1 = b_1$, wo $b_1 + c_1 = a$ ist.

44. Auf einer von zwei sich durchschneidenden Linien einen Punkt P derartig zu bestimmen, dass von ihm aus zwei auf der zweiten Linie gegebene Punkte A und B möglichst entfernt von einander erscheinen. (Vergl. § 37, Aufg. 69.)

45. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck

$$a \sin x + b \sin 2x$$

möglichst gross?

46. (Anschl.) Einem Kreise vom Radius r ist ein Sechseck eingeschrieben, welches aus einem Rechteck und zwei über den Gegenseiten construirten gleichschenkligen Dreiecken besteht: unter welcher Bedingung ist das Sechseck möglichst gross? (Vergl. Aufg. 27.)

47. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

ein Minimum?

48. (Anschl.) Welches der einem Kreise umschriebenen gleichschenkligen Dreiecke hat die kleinsten Schenkel?

49. Von einem Trapez, in welchem drei Seiten einander gleich sind, ist die vierte Seite gleich a gegeben: die ihr anliegenden Winkel derartig zu bestimmen, dass das Trapez möglichst gross wird.

50. Von einem Trapez sind die kleinere der parallelen Seiten gleich a und die nicht parallelen Seiten gleich b gegeben: unter welcher Bedingung ist das Trapez möglichst gross?

51. Für welchen Werth von x wird der Ausdruck

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos x + \sin \beta}{\sin x}$$

möglichst klein?

52. (Anschl.) Durch einen innerhalb eines Winkels A von gegebener Grösse α gegebenen Punkt P eine gerade Linie BC zu ziehen, so dass der Umfang des Dreiecks möglichst klein wird.

53. Zwei veränderliche Winkel α und β sind unter einander und mit zwei anderen gegebenen Winkeln γ und γ_0 verbunden durch die Gleichung

$$\sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta^2 = \sin \gamma_0{}^2:$$

welche weitere Beziehung muss zwischen α und β statthaben, wenn $\alpha + \beta$ möglichst klein sein soll? Vorausgesetzt ist noch, das γ und γ_0 kleiner als 90° sind und $\gamma < \gamma_0$.

§ 36. Cubische Probleme.

(Vergl. § 15.)

1. Die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, von welchem das Verhältniss λ des Lothes auf die Hypotenuse zur Summe der Hypotenuse und der einen Kathete gegeben ist. (Spezieller Fall $\lambda = 0{,}3$.)

2. Von einem Dreieck gegeben die Verhältnisse zweier Seiten zum Radius des inneren Berührungskreises: den von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkel zu bestimmen.

3. Wie Aufg. 2; jedoch sollen die Verhältnisse zweier Seiten zu dem Radius des der Gegenseite zugehörigen äusseren Berührungskreises gegeben sein.

4. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem die Verhältnisse zweier Seiten zu dem Radius des einer von ihnen zugehörigen äusseren Berührungskreises gegeben sind.

5. Gegeben das Verhältniss der Summe zweier Seiten eines Dreiecks und das des Radius des inneren Berührungskreises zum Radius des umschriebenen Kreises: den von den beiden ersten Seiten eingeschlossenen Winkel zu bestimmen.

6. Wie Aufg. 5; jedoch sind die Verhältnisse der Differenz zweier Seiten und des Radius des einer derselben zugehörigen äusseren Berührungskreises zum Radius des umschriebenen Kreises gegeben.

7. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, in welchem die Verhältnisse des Umfanges zum Radius des umschriebenen Kreises und dem des inneren Berührungskreises gegeben sind. (Spezieller Fall $s : r : \varrho = 128 : 65 : 12$.)

8. Wie Aufg. 7; jedoch sollen die Verhältnisse einer Seitenergänzung $(s - a)$ zum Radius des zugehörigen äusseren Berührungskreises (ϱ_a) und zum Radius des umschriebenen Kreises gegeben sein.

9. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, in welchem die oberen Abschnitte der drei Höhen sich wie $\lambda : \mu : \nu$ verhalten. (Spezieller Fall: $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 3$.)

10. (Anschl.) Von den vier Seiten eines Kreissehnenvierecks sind drei gleich a, b, c gegeben, während die vierte ein Durchmesser des Kreises sein soll: die letztere zu berechnen.

11. Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, in welchem das Verhältniss der Sinus ihrer Hälften gegeben ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \lambda : \mu : \nu.$$

12. Wie Aufg. 11; jedoch ist das Verhältniss der Sinus zweier Winkel zum Cosinus des dritten gegeben:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \cos\gamma = \lambda : \mu : \nu.$$

13. (Anschl.) Ueber dem Durchmesser eines Kreises als Seite ist demselben ein Viereck einzuschreiben, von welchem zwei Seiten a und b und die Entfernung der dritten Seite vom Mittelpunkt des Kreises c gegeben sind.

14. Ueber einer beliebig gegebenen Linie a als Basis ist ein gleichseitiges Fünfeck gezeichnet, dessen an a anliegende Winkel als Basiswinkel bezeichnet werden mögen: die Basiswinkel zu bestimmen, wenn die drei übrigen Winkel des Fünfecks einander gleich sein sollen. (Vergl. § 37, Aufg. 44.)

15. Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem die Seiten a, b, c und h_c (Loth auf c) eine arithmetische Reihe bilden.

16. Gegeben ein Kreis, eine Tangente T und eine gerade Linie L: es soll eine zweite Tangente an den Kreis gelegt werden, deren Abschnitt zwischen T und L eine gegebene Länge a hat. Gegeben das Loth vom Mittelpunkt des Kreises auf L gleich d, der Winkel $(T, L) = \alpha$ und der Radius r. (Spezielle Annahme $r = 1$, $a = 3$, $\alpha = 30°$, $d = 2$.)

17. Wie Aufg. 16; jedoch soll der Kreis durch die gesuchte Tangente von Aussen berührt werden.

18. (Anschl. an Aufg. 16.) Gegeben ein Kreis und zwei Tangenten: es soll eine dritte Tangente an den Kreis gelegt werden, welche ihn von Innen berührt und von gegebener Länge ist; d. i. die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem ein Winkel, die Gegenseite und der Radius des dieser Seite zugehörigen äusseren Berührungskreises gegeben sind:

$$\alpha, \; a, \; \varrho_a.$$

19. Die Abschnitte der Diagonalen eines Vierecks im Kreise verhalten sich wie $\lambda : \mu : \lambda_1 : \mu_1$, wo λ und λ_1 der einen, μ und μ_1 der zweiten Diagonale zugehören: den Winkel der beiden Diagonalen zu bestimmen.

20. Von einem gleichschenkligen Dreieck gegeben das Verhältniss der Halbirungslinie eines Basiswinkels zur Gegenseite gleich λ: zu bestimmen das Verhältniss der Basis zu den gleichen Seiten. (Besonderer Fall $\lambda = 1$.)

Zur Kreistheilung.

Anhang. Aufg. 21 — 24. (Die Winkel sind ersetzt durch die zum Radius 1 gehörigen Bogen.)

21. Bestimmung von $\cos \frac{\pi}{5}$ durch eine quadratische Gleichung.

22. Zurückführung der Berechnung von $\cos \frac{\pi}{7}$ auf eine cubische Gleichung.

23. Zurückführung der Berechnung von $\cos \frac{\pi}{13}$ auf eine cubische und quadratische Gleichungen.

24. Zurückführung der Berechnung von $\cos \frac{\pi}{17}$ auf quadratische Gleichungen.

§ 37. Vermischte Aufgaben.

1. Gegeben die Winkel α und β, einen Winkel x (bezüglich y oder z) zu bestimmen, dessen Sinus (bezüglich Cosinus oder Tangens) das arithmetische Mittel ist der Sinus (bezüglich der Cosinus oder der Tangenten) der gegebenen Winkel. Gegeben $\alpha = 67^\circ\, 8{,}9'$; $\beta = 52^\circ\, 51{,}1'$.

2. Wie Aufg. 1; jedoch soll an Stelle des arithmetischen Mittels das geometrische Mittel treten.

3. Wie Aufg. 1; jedoch soll an Stelle des arithmetischen Mittels das harmonische Mittel (d. i. das arithmetische Mittel der umgekehrten Werthe) treten.

4. Zwei Winkel α und β sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{a \cos \gamma + b} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \gamma}{a + b \cos \gamma}:$$

wie gross ist der Winkel $\alpha + \beta$?

5. (Anschl.) Zwei Winkel α und β sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \gamma}{b \cos \gamma - a}:$$

wie gross ist der Winkel $\beta - \alpha$?

6. Welche Beziehung besteht zwischen den Cosinus der Winkel λ, μ, ν, welche die Verbindungslinien der Eckpunkte eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte P der Ebene desselben mit einander bilden?

7. (Vergl. § 6, Aufg. 1.) Die Summe

$$\sin \lambda + \sin \mu + \sin \nu + \sin \omega$$

unter der Voraussetzung, dass $\lambda + \mu + \nu + \omega = 2\pi (= 360^\circ)$ ist, in ein Produkt zu verwandeln und aus diesem durch besondere Annahmen für die Winkel λ, μ, ν, ω abzuleiten die Produktentwickelungen, soweit sich dieselben ausführen lassen, für die Summen von Funktionen der Winkel α, β, γ eines Dreiecks

a. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.

b. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

c. $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}$.

d. $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma$.

e. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma$.

f. $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}$.

g. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$.

h. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \sin 2\gamma$.

i. $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}$.

k. $\cos \alpha + \cos \beta - \sin \gamma$.

l. $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2$. **m.** $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2$.

n. $\cos 2\alpha^2 + \cos 2\beta^2 - \sin 2\gamma^2$. **o.** $\cos\frac{\alpha^2}{2} + \cos\frac{\beta^2}{2} - \cos\frac{\gamma^2}{2}$.

Aufg. 8 — 12 (Eliminationsaufgabe von Lagrange).

8. Die Summe darzustellen der Reihe

$$\sin\alpha^2 + \sin 2\alpha^2 + \sin 3\alpha^2 \ldots + \sin(n-1)\alpha^2 = \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin k\alpha^2,$$

für den Werth $\alpha = \frac{m\pi}{2n}$. (Vergl. § 7, Aufg. 21.)

9. Die Summe darzustellen der Reihe

$$\sin p\gamma \cdot \sin q\gamma + \sin 2p\gamma \cdot \sin 2q\gamma + \ldots + \sin(n-1)p\gamma \cdot \sin(n-1)q\gamma =$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin kp\gamma \cdot \sin kq\gamma.$$

wo p und q positive ganze Zahlen und $\gamma = \frac{\pi}{n}$, für die beiden Annahmen $p \gtrless q$ und $p = q$.

10. (Anschl.) Gegeben $\gamma = \frac{\pi}{3}$: die Werthe der Unbekannten x und y zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$x \cdot \sin\gamma + y \cdot \sin 2\gamma = a,$$
$$x \cdot \sin 2\gamma + y \cdot \sin 4\gamma = b.$$

11. (Anschl.) Gegeben $\gamma = \frac{\pi}{4}$: die Werthe der Unbekannten x, y, z zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$x \cdot \sin\gamma + y \cdot \sin 2\gamma + z \cdot \sin 3\gamma = a,$$
$$x \ \sin 2\gamma + y \cdot \sin 4\gamma + z \cdot \sin 6\gamma = b,$$
$$x \cdot \sin 3\gamma + y \cdot \sin 6\gamma + z \cdot \sin 9\gamma = c.$$

12. (Anschl.) Die Werthe der Unbekannten $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$x_1 \cdot \sin\gamma + x_2 \cdot \sin 2\gamma + x_3 \cdot \sin 3\gamma + \ldots + x_{n-1} \cdot \sin\ (n-1)\gamma = a_1,$$
$$x_1 \cdot \sin 2\gamma + x_2 \cdot \sin 4\gamma + x_3 \cdot \sin 6\gamma + \ldots + x_{n-1} \cdot \sin 2(n-1)\gamma = a_2,$$
$$x_1 \cdot \sin 3\gamma + x_2 \cdot \sin 6\gamma + x_3\ \sin 9\gamma + \ldots + x_{n-1} \cdot \sin 3(n-1)\gamma = a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 \sin(n-1)\gamma + x_2 \cdot \sin 2(n-1)\gamma + x_3 \cdot \sin 3(n-1)\gamma \ldots +$$
$$+ x_{n-1} \cdot \sin(n-1)^2\gamma = a_{n-1},$$

wo $\gamma = \frac{\pi}{n}$ ist.

---

13. Durch einen Kreis vom Radius r werden drei einander gleiche Kreise umhüllt, welche einander zu zwei berühren: die Radien der inneren Kreise zu bestimmen.

14. (Anschl.) Durch einen Kreis vom Radius r werden n einander gleiche Kreise umhüllt, welche einander zu zwei berühren: die Radien x dieser inneren Kreise zu berechnen und den Radius y ihres inneren Berührungskreises.

15. (Anschl.) Ein System von n gleich grossen Kreisen mit den Radien ϱ, welche sich aufeinanderfolgend zu zwei berühren, wird von zwei concentrischen Kreisen berührt: die Radien derselben zu bestimmen.

16. Ein Kreis vom Radius r wird durch drei einander gleiche Kreise, welche sich zu zwei berühren, von Aussen berührt: die Radien dieser Kreise zu bestimmen.

17. Wie Aufg. 16; jedoch sollen an Stelle der drei Berührungskreise deren n treten.

---

18. Die Seiten a eines gleichseitigen Dreiecks werden zu zwei innerhalb des Dreiecks durch drei Kreise mit den Radien b berührt: den Radius x desjenigen Kreises zu bestimmen, welchem diese drei Kreise umschrieben sind. Wie gross muss b sein, wenn die vier inneren Kreise einander gleich sein sollen?

19. (Anschl.) Die auf einanderfolgenden Seiten eines regelmässigen n-Ecks, welches einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben ist, werden zu zwei im Inneren des Vielecks durch gleich grosse Kreise mit dem Radius b berührt: den Radius x desjenigen Kreises zu bestimmen, welchem diese n Kreise umschrieben sind.

20. Die (nicht verlängerten) Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit den Seiten a sind zu zwei Tangenten von drei gleichgrossen Kreisen, welche sich zu zwei berühren: die Radien dieser Kreise zu bestimmen.

21. (Anschl.) Die Seiten eines regelmässigen n-Ecks sind zu zwei Tangenten von n gleichgrossen Kreisen, welche sich zu zwei berühren: die Radien x dieser Kreise zu bestimmen.

22. (Anschl.) Dem System der n Kreise in Aufg. 21 ist ein neuer Kreis eingeschrieben: den Radius y dieses Kreises zu bestimmen und anzugeben, für welchen Werth von n alle $(n + 1)$ Kreise einander gleich sind.

23. Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seiten gleich a gegeben sind, sind zu zwei gleichgrosse Kreise mit dem Radius b gelegt: den Radius desjenigen Kreises zu bestimmen, welcher die drei Kreise von Innen, bezüglich von Aussen berührt. Welchen Werth hat b, wenn die Kreise durch denselben Punkt gehen sollen?

24. Wie Aufg. 23; jedoch soll das gleichseitige Dreieck durch ein regelmässiges n-Eck ersetzt werden.

25. Gegeben ein Dreieck und ein dem umschriebenen Kreise concentrischer Kreis K_1 mit dem Radius r_1: es soll der Radius eines Kreises bestimmt werden, welcher K_1 und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

---

26. Wenn durch die Linie AD der Winkel A des Dreiecks ABC in die beiden Stücke α_1 und α_2 getheilt wird, zu beweisen dass $$\sin\beta \cdot \sin\alpha_2 + \sin\gamma \cdot \sin\alpha_1 = \sin\alpha \cdot \sin\delta$$ ist, wo α, β, γ die Winkel des Dreiecks, δ ein Winkel an D sind, ferner β und α_2, sowie γ und α_1 verschiedenen Dreiecken angehören.

27. Ein Winkel eines Dreiecks wird durch eine gerade Linie so getheilt, dass sich die Sinus der Theile wie die anstossenden Seiten verhalten: den Winkel x zu bestimmen der Theilungslinie mit der dritten Seite, wenn die Winkel des Dreiecks gegeben sind. Numerisches Beispiel: $\alpha = 67^\circ 30'$, $\beta = 60^\circ$.

28. Durch die beiden (die innere und äussere) Halbirungslinien eines Dreieckswinkels wird auf der Gegenseite ein Stück von bestimmter Länge abgegrenzt; dasselbe werde, entsprechend der zugehörigen Seite, durch d_a, d_b oder d_c bezeichnet: welche Beziehung findet zwischen den drei Strecken d_a, d_b, d_c statt?

29. Durch das Dreieck ABC, dessen Winkel gegeben seien, ist eine beliebige Transversale G gelegt, welche mit den Seiten BC, CA, AB bezüglich Winkel bildet, deren Sinus die Werthe $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$ haben; ferner sind durch die Ecken des Dreiecks Parallelen gelegt zu G, welche auf den jedesmaligen Gegenseiten die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 ergeben. Die Verhältnisse zu bestimmen der Abschnitte $BA_1 : CA_1$ u. s. w. der Seiten.

30. (Anschl.) Nachzuweisen, dass wenn man durch die Eckpunkte eines Dreiecks Linien zieht, welche conjugirt harmonisch sind zu einer beliebigen Richtung, (zu den Linien AA_1, BB_1, CC_1 von Aufg. 29) die Schnittpunkte dieser Linien mit den zugehörigen Gegenseiten auf einer geraden Linie liegen.

---

31. Von einem Dreieck ABC gegeben die Seiten und die Winkel: das Verhältniss darzustellen des Produktes der drei Verbindungslinien des Mittelpunktes N des inneren Berührungskreises mit den Ecken des Dreiecks zum Produkt der Seiten. (Vergl. § 34, Aufg. 5.)

32. (Anschl.) Das Produkt der drei Verbindungslinien auszudrücken durch die Radien des umschriebenen Kreises und des inneren Berührungskreises.

33. (Anschl.) Nachzuweisen, dass die Summe der Quadrate der drei Verbindungslinien, je mit dem Sinus des Gegenwinkels des Dreiecks multiplicirt, dem doppelten Inhalt des Dreiecks gleichkommt.

34. (Anschl.) Welches sind die den Aufg. 31—33 entsprechenden Eigenschaften der Verbindungslinien des Mittelpunktes N_a des die Seite a von Aussen berührenden Berührungskreises mit den Ecken des Dreiecks?

35. (Anschl.) Geometrisch nachzuweisen die Richtigkeit der Formel

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

wenn α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind. (Vergl. § 5, Aufg. 18.)

35a. (Anschl.) Ebenso die der Formel

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

---

36. Wenn man auf den Radien des einem Dreieck umschriebenen Kreises vom Mittelpunkte aus den Radius des inneren Berührungskreises abträgt, so sind die Endpunkte dieser Stücke die Eckpunkte eines neuen Dreiecks, welches mit dem Höhen-Fusspunktsdreieck gleichen Umfang hat.

37. Die Ecken eines Dreiecks sind mit einem Punkt in der Ebene desselben verbunden: den Inhalt des Dreiecks zu berechnen, wenn die Verbindungslinien a_1, b_1, c_1 und die Winkel des Dreiecks gegeben sind.

38. Die Seiten eines Dreiecks werden nach beiden Seiten hin um ein gleiches Stück verlängert: wie lang muss dasselbe sein, wenn das durch die Verbindung der Endpunkte der Verlängerungen entstehende Sechseck doppelt so gross sein soll als das gegebene Dreieck?

---

39. Einem Rechteck mit den Seiten a und b ist ein Rhombus eingeschrieben, so dass durch zwei Gegenecken die Seiten b im Verhältniss von $\lambda:\mu$ getheilt werden: den Inhalt und die Winkel des Rhombus zu bestimmen. Für welchen Werth von $\lambda:\mu$ ist der Rhombus möglichst klein?

40. (Anschl.) Einem Rechteck, von dessen Seiten a und b das Verhältniss gegeben ist, $b=a\operatorname{tg}\varepsilon$, ist ein Rhombus eingeschrieben von gegebenem Umfang ($4c$): den Inhalt desselben zu bestimmen.

41. (Anschl.) Einem Rhombus, von dessen Diagonalen das Verhältniss gegeben ist, $b = a \operatorname{tg} \varepsilon$, ist ein Rechteck umschrieben vom Inhalt c^2: die Seiten desselben zu berechnen.

42. Zwei Gräben, von bezüglich 15m Länge und 12m Breite durchschneiden sich unter dem Winkel 54°: wie gross sind die beiden Diagonalen?

43. (Anschl.) Unter welchem Winkel müssen sich die Gräben in Aufg. 42 durchschneiden, wenn von den beiden Diagonalen die eine doppelt so lang sein soll als die andere?

---

44. Ueber einer beliebig gegebenen Linie a als Basis ist ein gleichseitiges Fünfeck gezeichnet, dessen an a anliegende Winkel die Basiswinkel heissen mögen. Diese Basiswinkel zu bestimmen, wenn dieselben gleich dem Gegenwinkel der Basis sein sollen. (Vergl. § 36, Aufg. 14.)

45. (Anschl.) Ueber der Basis a ist ein Fünfeck construirt, in welchem vier Winkel einander gleich sind, und der fünfte Winkel, der Winkel an der Spitze, gleich α gegeben ist. Den Inhalt des Fünfecks und die Höhe zur Basis a zu bestimmen, wenn die unteren drei Seiten des Fünfecks gleich a gegeben sind.

46. Wie Aufgabe 45; jedoch sollen die beiden oberen Seiten des Fünfecks gleich der Basis a sein.

47. (Anschl.) Zu beweisen, dass sich dem Fünfeck in Aufg. 46 ein Kreis umschreiben lässt: den Radius dieses Kreises zu bestimmen.

48. (Anschl.) Den Inhalt eines Fünfecks zu bestimmen, in welchem vier Winkel einander gleich sind, und das durch drei erste*) Diagonalen ($= a$) und zwei Seiten eines regelmässigen Achtecks gebildet wird.

49. Den Inhalt zu bestimmen eines Fünfecks, in welchem vier Winkel einander gleich sind, und das durch drei Seiten ($= a$) und zwei $(k - 2)$te*) Diagonalen eines regelmässigen $(2k + 1 = n)$-Ecks gebildet wird. — Beispiele: $n = 5$; $n = 7$.

50. Den Inhalt zu bestimmen eines Fünfecks, in welchem vier Winkel einander gleich sind, und das zu Seiten hat drei erste Diagonalen ($= a$) und zwei $(2k - 4)$te*) Diagonalen eines $4k$-Ecks, wo $2k = n$ ist. — Beispiele: $n = 4$; $= 6$; $= 8$.

51. Von einem Fünfeck sind die fünf Dreiecke gegeben, welche durch die Diagonalen vom Fünfeck abgeschnitten werden, gleich Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5: den Inhalt des Fünfecks zu bestimmen.

---

*) Siehe die Anm. zu § 31, Aufg. 22.

52. Durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC sind die Durchmesser des umschriebenen Kreises AA_1, BB_1, CC_1 gezogen: den Inhalt des Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$ zu bestimmen.

---

53. Der Winkel an der Spitze gleich α eines gleichschenkligen Dreiecks ist in drei gleiche Theile getheilt: wie verhalten sich die Abschnitte der Basis zu einander und zur ganzen Basis?

54. Die Basis a eines gleichschenkligen Dreiecks ist in drei gleiche Theile getheilt und die Theilpunkte sind mit der Spitze verbunden: die Abschnitte x, y, x des Winkels an der Spitze α darzustellen. (Vergl. § 32, Aufg. 23.)

55. Die Seite a des Dreiecks ABC ist durch die Punkte D und E in drei gleiche Theile getheilt: wie gross ist der Winkel DAE, wenn die Winkel $\beta = 50^\circ$ und $\gamma = 60^\circ$ gegeben sind?

56. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse in drei gleiche Theile getheilt und sind die Theilpunkte mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels verbunden; der innere Winkel dieser Verbindungslinien sei gleich α: wie gross sind die beiden äusseren Winkel? Spezieller Fall: $\alpha = 30^\circ$.

57. Ueber der geraden Linie BC, welche in drei gleiche Theile getheilt ist, als Basis ist ein Dreieck construirt und die Spitze A desselben mit den Theilpunkten verbunden. Den inneren Winkel dieser Verbindungslinien zu bestimmen, wenn die Differenz der äusseren dieser Winkel gleich δ und BAC gleich α gegeben sind. Spezielle Annahme $\alpha = 60^\circ$, $\delta = 10^\circ$.

58. Der Winkel α des Dreiecks ABC ist in drei gleiche Theile getheilt: wie verhält sich der durch die beiden Theillinien auf BC bestimmte Abschnitt DE zur Seite BC, wenn die Winkel $\beta = 50^\circ$ und $\gamma = 60^\circ$ gegeben sind?

59. Wie Aufg. 58; jedoch soll nur der Winkel α gegeben sein und die Winkel β und γ bestimmt werden für die Voraussetzung, dass $BC = \lambda \cdot DE$ gegeben sein soll. Spezielle Annahme: $\lambda = 4$, $\alpha = 70^\circ$.

60. Auf der Seite BC des Dreiecks ABC sind zwei Punkte D und E mit A verbunden und zwar ist $BD : CE = AD : AE$: welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln $BAD = x$ und $EAC = z$, und welches ist der Ausdruck für DE, wenn die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC und der Winkel BAD gegeben sind?

61. Wie Aufg. 60; jedoch sollen die Winkel x und z bestimmt werden, wenn der Winkel $DAE = \alpha_1$ gegeben ist: als bekannt sind wieder die Winkel des Dreiecks ABC vorausgesetzt. Spezieller Fall: gegeben $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\alpha_1 = 20^\circ$.

62. Wie Aufg. 61; jedoch soll statt des Winkels α_1 die Differenz der Winkel x und z gegeben sein. Spezieller Fall: $z - x = \delta = 5^\circ$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 50^\circ$.

63. Die Punkte A, B, C einer geraden Linie sind mit einem ausserhalb gelegenen Punkte D verbunden, so dass die Verbindungslinien ein gegebenes Verhältniss haben, nämlich

$$AD : BD : CD = \lambda : \mu : \nu:$$

die Winkel dieser Linien zu bestimmen, wenn $AB = c$, $BC = a$ gegeben sind.

---

64. In der Ebene eines Dreiecks, von dem die drei Winkel α, β, γ gegeben sind, einen Punkt P zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit den Ecken Winkel bilden, deren Sinus sich wie $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ verhalten.

65. Wie Aufg. 64; jedoch sollen sich die Sinus der Winkel der Verbindungslinien wie $\lambda : \mu : \nu$ verhalten. Den Punkt P zu construiren.

66. (Anschl.) Nachzuweisen, dass wenn man über den Seiten a, b, c des Dreiecks ABC bezüglich nach Aussen hin die Dreiecke L_1BC, AM_1C, ABN_1 errichtet, welche sämmtlich einem beliebig gegebenen Dreieck LMN ähnlich sind und zwar so, dass die Eckpunkte A, B, C bezüglich den Punkten L, M, N entsprechen, sich die Verbindungslinien der Gegenecken AL_1, BM_1, CN_1 in demselben Punkte P durchschneiden.

67. (Anschl.) Die den Dreiecken BCL_1, CAM_1, ABN_1 umschriebenen Kreise durchschneiden sich in demselben Punkte P und umgekehrt:

Wenn man durch die Ecken eines Dreiecks ABC zu zwei und einen beliebigen Punkt P Kreise construirt, so durchschneiden die Verbindungslinien AP, BP, CP die über den Gegenseiten construirten Kreise in den neuen Punkten A_0, B_0, C_0 und es sind die Dreiecke A_0BC, AB_0C, ABC_0 einander ähnlich.

---

68. Auf dem einen Schenkel eines Winkels seien zwei Punkte gegeben A und B, bestimmt durch ihre Entfernungen vom Scheitelpunkt C, $AC = b$ und $BC = a$: welchen Winkel u bilden die Verbindungslinien der Punkte A und B mit einem Punkte P des anderen Schenkels, wenn $PC = c$ gegeben ist?

69. (Anschl.) Wenn umgekehrt der Winkel δ gegeben ist, welchen die Linien PA und PB mit einander bilden, so soll die Entfernung x des Punktes P vom Scheitelpunkt C bestimmt werden. Welches ist der grösste Werth des Winkels δ? (Vergl. § 35, Aufg. 44.)

70. Gegeben die Verbindungslinien r_1 und r_2 zweier Punkte P_1 und P_2 mit einem Punkte O (dem Anfangspunkte) und ihre Winkel α_1 und α_2 mit einer durch O gezogenen Linie OA (der Axe): die Entfernung r zu bestimmen eines beliebigen auf P_1P_2 liegenden Punktes P von O, wenn OP mit OA den Winkel α bildet und den Winkel φ der Linie P_1P_2 mit der Axe.

71. Wie Aufg. 70; jedoch soll die Länge $OP = r$ gegeben sein und der Winkel $POA = \alpha$ bestimmt werden.

72. (Anschl.) Gegeben drei Punkte P_1, P_2, P_3 durch ihre Entfernungen vom Anfangspunkte O (Aufg. 70) und die Winkel ihrer Verbindungslinien OP_1, OP_2, OP_3 mit der Axe OA, (d. h. ihre Polarcoordinaten)

$$r_1,\ \varphi_1;\ r_2,\ \varphi_2;\ r_3,\ \varphi_3:$$

den Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ zu bestimmen.

73. (Anschl.) Die Beziehung darzustellen zwischen den Polarcoordinaten $r_1\varphi_1$, $r_2\varphi_2$, $r_3\varphi_3$ dreier Punkte, welche auf einer geraden Linie liegen.

74. Einem gegebenen Kreise ein Dreieck einzuzeichnen, dessen Seiten durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks gehen.

75. (Anschl.) Auf dem Durchmesser eines Kreises mit dem Radius r sind drei Punkte gegeben A, B, C durch ihre Entfernungen vom Mittelpunkte O, $OA = \lambda r$, $OB = \mu r$, $OC = \nu r$: ein Dreieck UVW zu bestimmen, welches dem Kreise eingeschrieben ist, und dessen Seiten VW, WU, UV bezüglich durch A, B, C gehen. Numerisches Beispiel: $\lambda = 1/3$, $\mu = 2/3$, $\nu = 4/3$.

76. Gegeben zwei gerade Linien G_1 und G_2, ihrer Lage nach, durch ihre Entfernungen p_1 und p_2 vom Anfangspunkte O und die Winkel φ_1 und φ_2, welche die Lothe p_1 und p_2 mit der Axe OA bilden, d. h. durch die Polarcoordinaten der Fusspunkte der von O aus auf sie gefällten Lothe: die Polarcoordinaten des Schnittpunktes P der beiden Linien G_1 und G_2 zu bestimmen.

77. (Anschl.) Gegeben drei gerade Linien G_1, G_2, G_3 durch die Polarcoordinaten der Fusspunkte der von O aus auf sie gefällten Lothe (Vergl. Aufg. 76) p_1 und φ_1, p_2 und φ_2, p_3 und φ_3: die Seiten und den Inhalt des durch die drei Linien gebildeten Dreiecks zu bestimmen.

78. (Anschl.) Die Bedingung anzugeben, dass die drei geraden Linien G_1, G_2, G_3 durch denselben Punkt gehen.

79. Einem gegebenen Dreieck ein zweites einzuschreiben, welches zugleich einem gegebenen Kreise umschrieben ist.

80. (Anschl.) Einem gegebenen Kreise ein Dreieck umzuschreiben, dessen Eckpunkte auf drei gegebenen parallelen Linien liegen sollen.

§ 38. Aufgaben aus der Physik.

a. Mechanik.

Aufg. 1—4. Gleichförmige Bewegung.

1. Zwei Punkte A und B bewegen sich auf concentrischen Kreisen, deren Radien gleich a und b, $(a > b)$, gegeben sind, bezüglich mit der Winkelgeschwindigkeit α und β, von einer gegebenen Anfangslage aus: anzugeben ihre Entfernung nach t Zeiteinheiten. Nach wieviel Zeiteinheiten (Sekunden) haben die beiden Punkte ihre grösste, bezüglich ihre kleinste Entfernung?

2. (Anschl.) Wenn hat der Punkt B, von A aus gesehen, den grössten Abstand von C, d. h. nach Verlauf von wieviel Zeiteinheiten ist Winkel CBA gleich einem Rechten?

3. (Anschl.) Bestimmung der Stillstandspunkte*): d. h. nach welcher Zeit scheinen B und C, von A aus gesehen, dieselbe Geschwindigkeit zu haben?

3a. (Anschl.) Anwendung auf die Bewegung der Erde A und der Venus B. Gegeben $\alpha = 1, \beta = 1{,}625$; $a = 1$, $b = {}^{13}/_{18}$.

4. Zwei Punkte A und B bewegen sich, bezüglich mit der Geschwindigkeit α und β, gleichförmig auf zwei sich durchschneidenden geraden Linien, von einer gegebenen Anfangslage A_0 und B_0 aus: welchen Abstand haben sie nach t Zeiteinheiten? nach wieviel Sekunden haben sie ihren kleinsten Abstand und wie gross ist derselbe? Der Schnittpunkt der Linien sei C, ihr Winkel γ, $CA_0 = b_0$, $CB_0 = a_0$ gegeben.

Aufg. 5—12. Die Flugbahn eines Geschosses.

5. Die Flugbahn eines schräg aufwärts geworfenen schweren Punktes ist definirt durch die beiden Gleichungen:

$$x = ct \cdot \cos \alpha,\ y = ct \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

wo x und y bezüglich die Abscisse und Ordinate sind für den Ort des Punktes, bezogen auf den Anfangspunkt A der Bewegung und die Horizontale durch A als Abscissenaxe, nach Verlauf von t Sekunden, c die Anfangsgeschwindigkeit und α der Elevationswinkel, g die Beschleunigung der Erdschwere: den Elevationswinkel zu bestimmen, wenn $x = x_1$ und $y = y_1$ gegeben sein sollen.

6. Innerhalb welcher Grenzen ist bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit ein Punkt noch zu erreichen?

7. Welche horizontale Wurfweite w entspricht dem Elevationswinkel α? für welchen Werth α_0 von α ist die Wurfweite möglichst gross?

---

*) Vergl. Elem. der Astronomie des Verfassers, § 30, oder Jochmann Phys. § 376.

8. Die Flugbahn soll durch einen Punkt P gehen, dessen Verbindungslinie mit dem Anfangspunkte A der Bewegung den Winkel β mit dem Horizont bildet: für welchen Werth α_1 des Elevationswinkels α ist die Entfernung P von A für ein gegebenes c möglichst gross? für welche Elevation α_2 kann man denselben Punkt P erreichen als für die Elevation α?

9. Den Elevationswinkel α zu bestimmen, wenn die Flugbahn durch zwei Punkte P_1 und P_2 gehen soll, deren Abscisse und Ordinate bezüglich x_1 und y_1, x_2 und y_2 sind. (Vergl. § 17, Aufg. 67).

10. Den Winkel φ zu bestimmen, welchen die Verbindungslinie zweier Punkte P_1 und P_2 der Flugbahn, welche durch ihre Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ (Aufg. 9) bestimmt sind, mit der Horizontalen, (der Abscissenaxe), bildet.

11. (Anschl.) Welchem Grenzwerth φ_0 nähert sich der Winkel φ, wenn die beiden Punkte P_1 und P_2 zusammenfallen, d. h. welchen Winkel bildet die Tangente in einem beliebigen Punkte P_1 der Flugbahn mit dem Horizont?

12. An welcher Stelle (in welcher horizontalen Entfernung x_0 von A) erreicht der bewegte Punkt seine grösste Höhe, und wie gross (y_0) ist dieselbe?

Aufg. 13 — 32. Zusammensetzung von Kräften, welche auf einen Punkt in der Ebene wirken.

13. Auf einen Punkt O wirken zwei Kräfte $P_1 = 5$ und $P_2 = 7$ unter einem rechten Winkel: Grösse und Richtung der Resultante P_0 zu bestimmen. **a.** Gegeben $P_1 = 21$, $P_2 = 20$.

14. Eine Kraft $P = 25$ in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte zu zerlegen, deren eine mit P den Winkel $\alpha = 60°$ bildet: die Seitenkräfte zu bestimmen. **a.** $P = 14$; $\alpha = 34° \, 6{,}5'$.

15. Zwei Kräfte P_1 und P_2, welche den Winkel α mit einander bilden, wirken gleichzeitig auf denselben Punkt: Grösse und Richtung der Resultante anzugeben.

a. Gegeben $P_1 = 6{,}1$; $P_2 = 10{,}9$; $\alpha = 113° \, 0{,}6'$.

b. „ $P_1 = 3$; $P_2 = 4$; $\alpha = 50°$.

16. Eine Kraft P soll in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, welche mit ihr gegebene Winkel α und β bilden: P_1 und P_2 zu bestimmen. Gegeben $P = 40{,}8$; $\alpha = (PP_1) = 5° 43{,}5'$; $\beta = 77° \, 19{,}2'$.

17. Drei auf einen Punkt wirkende Kräfte P_1, P_2, P_3 halten sich das Gleichgewicht. Gegeben $P_1 = 5$ und das Verhältniss der Winkel $(P_1 P_2) : (P_2 P_3) : (P_3 P_1) = 7 : 8 : 9$: P_2 und P_3 zu bestimmen.

18. Drei auf einen Punkt wirkende Kräfte von gegebener Grösse halten einander im Gleichgewicht: welche Winkel bilden die Kräfte mit einander? Gegeben $P_1 = 5$; $P_2 = 29$; $P_3 = 30$.

19. Von drei auf einen Punkt wirkenden und sich das Gleichgewicht haltenden Kräften ist das Verhältniss gegeben: $P_1 : P_2 : P_3 = 51 : 52 : 53$. Welche Winkel bilden die Kräfte mit einander?

20. Von drei auf einen Punkt wirkenden und sich das Gleichgewicht haltenden Kräften gegeben die Summe und das Verhältniss ihrer Winkel: die Kräfte zu bestimmen.

$$P_1 + P_2 + P_3 = 100;\ (P_1P_2) : (P_2P_3) : (P_3P_1) = 5 : 6 : 7.$$

21. Man kennt von drei auf einen Punkt wirkenden und sich das Gleichgewicht haltenden Kräften, und von denen die eine P_1 das arithmetische Mittel der beiden anderen ist, den Winkel der beiden letzteren: das Verhältniss dieser Kräfte und ihren Winkel mit der ersten Kraft zu bestimmen. Gegeben $(P_2P_3) = 130°$.

22. Wie Aufg. 21; jedoch soll von den drei Kräften die eine P_1 das geometrische Mittel der beiden anderen sein. Gegeben $(P_2P_3) = 130°$.

23. Auf einen Punkt wirken in derselben Ebene drei Kräfte P_1, P_2, P_3, und zwar P_1 und P_3 auf entgegengesetzten Seiten von P_2: Grösse und Richtung der Resultante anzugeben, wenn $P_1 = 5$, $P_2 = 6$, $P_3 = 7$, $\measuredangle P_1P_2 = 54°$, $\measuredangle P_3P_2 = 45°$ gegeben sind.

a. $P_1 = 3, P_2 = 2$, $P_3 = 1$, $\measuredangle P_1P_2 = 160°$, $\measuredangle P_3P_2 = 100°$.

24. Auf den Mittelpunkt eines Kreises wirken vier Kräfte, der Grösse und Richtung nach dargestellt durch vier Radien, welche die Peripherie im Verhältniss von $3 : 5 : 9 : 7$ theilen: die Grösse und Richtung der Resultante zu bestimmen.

25. Vier Kräfte, welche auf den Mittelpunkt eines Kreises wirken und die Peripherie im Verhältniss von $6:4:5:9$ theilen, halten sich das Gleichgewicht: die Kräfte zu bestimmen, wenn die erste und dritte, sowie die zweite und vierte dieselbe Summe (100) haben.

---

26. Drei auf einen Punkt wirkende Kräfte seien der Grösse und Richtung nach dargestellt durch die Verbindungslinien dieses Punktes als des Mittelpunktes eines Kreises mit den Ecken eines ihm eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks: zu beweisen, dass sich die Kräfte das Gleichgewicht halten.

27. (Anschl.) Wie Aufg. 26; jedoch soll der Angriffspunkt der drei Kräfte ein beliebiger Punkt des Kreises sein: die Grösse und Richtung der Resultante zu bestimmen, wenn r der Radius des Kreises ist.

28. Wie Aufg. 26; jedoch soll das gleichseitige Dreieck durch ein regelmässiges n-Eck ersetzt werden und demnach n die Anzahl der auf den Punkt wirkenden Kräfte sein.

29. (Vergl. Aufg. 27.) Ein System von n auf einen Punkt in der Ebene wirkenden Kräften sei der Grösse und Richtung nach dargestellt durch die Verbindungslinien dieses Punktes mit den Ecken eines regelmässigen n-Ecks: die Grösse und Richtung der Resultante des Kräftesystems darzustellen.

30. Gegeben ein Dreieck: einen Punkt P in der Ebene desselben zu bestimmen, für welchen als Angriffspunkt diejenigen drei Kräfte, welche ihrer Grösse und Richtung nach durch die Verbindungslinien von P mit den Ecken des Dreiecks dargestellt werden, sich das Gleichgewicht halten.

31. Wie Aufg. 30; jedoch soll der geometrische Ort aller Punkte P gefunden werden, für welche die drei Kräfte eine Resultante von gegebener Grösse haben.

32. Wie Aufg. 30; jedoch soll das Dreieck durch ein Viereck und demnach die drei im Gleichgewicht stehenden Kräfte durch ein Gleichgewichtssystem von vier Kräften ersetzt werden.

Aufg. 33—47. Zusammensetzung paralleler Kräfte; Bestimmung des Schwerpunktes*).

33. Die Eckpunkte eines gewichtslosen Dreiecks sind mit Gewichten belastet, welche den entsprechenden Gegenseiten proportional sind: die Lage zu bestimmen des Unterstützungspunktes.

34. Wie Aufg. 33; jedoch sollen die Ecken des Dreiecks mit gleichen Gewichten belastet sein.

35. Mit welchen Gewichten hat man die Eckpunkte eines gewichtslosen Dreiecks, von welchem die Winkel gegeben sind, zu belasten, damit der Mittelpunkt des Druckes werde:

a. der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises;

b. der Höhenschnittpunkt;

c. der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises;

d. der Mittelpunkt des die Seite a von Aussen berührenden Berührungskreises;

e. der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Berührungspunkten des inneren Berührungskreises?

---

*) Vergl. Aufg. a. d. Algebra u. niederen Analysis des Verfassers, § 47, Aufg. 25—34.

36. Den Schwerpunkt zu bestimmen des Umfanges eines Dreiecks, von welchem die Winkel und ϱ, der Radius des eingeschriebenen Kreises, gegeben sind.

37. In welcher Entfernung von der grössten Seite (dem Durchmesser des umschriebenen Kreises), liegt der Schwerpunkt des Umfanges der Hälfte

a. eines regelmässigen Sechsecks;

b. eines regelmässigen Achtecks;

c. eines regelmässigen $2n$-Ecks

in einem Kreise, dessen Radius gleich r gegeben ist?

38. (Anschl.) Welche Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises hat der Schwerpunkt des Bogens eines Halbkreises mit dem Radius r?

39. Einem Kreissegment, von welchem der Radius r und der zugehörige Centriwinkel 2α gegeben sind, ist eine Reihe von n gleichlangen Sehnen eingeschrieben, so dass ein $(n+1)$-Eck entsteht: den Abstand x zu bestimmen des Schwerpunktes dieses Systems von Sehnen vom Mittelpunkt des Kreises.

40. (Anschl.) Welche Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises hat der Schwerpunkt eines Bogens, der zu einer Sehne a in einem Kreise mit dem Radius r gehört?

41. Den Schwerpunkt zu bestimmen eines Trapezes, von welchem die beiden parallelen Seiten a und b und die Höhe h gegeben sind. — Bes. Fall. Das Trapez ist ein halbes regelmässiges Sechseck in einem Kreise mit dem Radius r.

42. Welche Entfernung von der Basis (dem Durchmesser des umschriebenen Kreises) hat der Schwerpunkt eines halben regelmässigen Achtecks in einem Kreise mit dem Radius r?

43. Wie Aufg. 42; jedoch soll an Stelle des Achtecks ein regelmässiges $2n$-Eck treten.

44. (Anschl.) Welche Entfernung vom Mittelpunkt hat der Schwerpunkt eines Halbkreises mit dem Radius r?

45. In einem Kreisausschnitt mit dem Radius r und der Sehne a sind dem zugehörigen (kleineren) Bogen n gleiche Sehnen eingeschrieben: den Schwerpunkt des durch dieselben bestimmten $(n+2)$-Ecks zu bestimmen.

46. (Anschl.) Welche Entfernung vom Mittelpunkt hat der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes, welcher zum Bogen b, (der Sehne a) und dem Radius r gehört?

47. (Anschl.) Welche Entfernung vom Mittelpunkt des zugehörigen Kreises hat der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes, welcher zum Bogen b, (der Sehne a, dem Centriwinkel α) und dem Radius r gehört?

Aufg. 48—52. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene.

48. Auf die Eckpunkte A, B, C des (gewichtslosen) rechtwinkligen Dreiecks ABC wirken in der Richtung der Seiten AB, BC, CA drei Kräfte, welche bezüglich durch diese Seiten selbst auch ihrer Intensität nach dargestellt sind: welches ist das Resultat ihrer gemeinschaftlichen Wirkung?

Gegeben die Katheten $a = 8$ und $b = 15$.

49. Auf die Ecken A, B, C des (gewichtslosen) Dreiecks ABC wirken in der Richtung der Seiten AB, BC, CA bezüglich die Kräfte P_a, P_b, P_c: das Resultat ihrer Gesammtwirkung anzugeben, wenn die Seiten des Dreiecks bekannt sind: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ und die Kräfte $P_a = 13$, $P_b = 5$, $P_c = 23$.

50. Auf die abwechselnden Ecken A, C, E des (gewichtslosen) regelmässigen Sechsecks $ABCDEF$ wirken in Richtung der Seiten AB, CD, EF bezüglich die Kräfte P_1, P_2, P_3: welches ist das Resultat ihrer Gesammtwirkung,

a. wenn die Kräfte P einander gleich sind?

b. wenn $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 3$ gegeben sind?

Bekannt die Seiten des Sechsecks gleich 1.

51. Auf die Punkte A, B, C eines Kreises, durch welche der Umfang desselben im Verhältniss von $3:4:5$ getheilt wird, wirken in der Richtung der Tangenten und im Drehungssinne ABC die Kräfte $P_a = 3$, $P_b = 4$, $P_c = 5$: welches ist das Resultat ihrer gemeinschaftlichen Wirkung, wenn der Kreis als gewichtslos angesehen wird? Gegeben der Radius gleich 1.

52. Auf die Ecken A und B des gewichtslosen Dreiecks ABC wirken nach Innen zwei Kräfte, welche in ihrer Richtung und Intensität bezüglich durch die Höhe h in A und den Radius des umschriebenen Kreises r in B dargestellt werden: welche Kraft muss auf C wirken, damit die drei Kräfte nur eine augenblickliche Drehung veranlassen, und wie gross ist das Drehmoment der drei Kräfte? Gegeben $a = 36$, $b = 29$, $c = 25$.

b. Optik.

Aufg. 53 — 62. Reflexion des Lichtes.

53. Zwei Punkte A und B auf derselben Seite eines ebenen Spiegels, und von demselben bezüglich um a und b entfernt, sind durch einen Lichtstrahl verbunden, der vom Spiegel reflektirt wird: den Einfallswinkel zu bestimmen, wenn die Entfernung AB gleich c gegeben ist. ($a = 4$, $b = 9$, $c = 13$.)

54. Zwei Punkte A und B, welche zwischen zwei auf einander senkrechten Spiegeln, und zwar in einer zur gemeinschaftlichen Kante senkrechten Ebene liegen, sind durch einen Lichtstrahl verbunden, nachdem derselbe an beiden Spiegeln eine Reflexion erlitten hat: die Einfallswinkel an beiden Spiegeln zu bestimmen, wenn die von A und B auf die beiden Spiegel gefällten Lothe bezüglich gleich a, a_1 und b, b_1 gegeben sind.

55. (Anschl.) Wie Aufgabe 54; jedoch sollen die beiden Spiegel den Winkel γ mit einander bilden.

56. Den Gang eines Lichtstrahls zu bestimmen, der von einem Punkte P im Innern eines Quadrates $ABCD$, dessen Seiten als spiegelnd gedacht werden, ausgehend nach dreimaliger Reflexion an auf einanderfolgenden Seiten wieder zum Ausgangspunkte zurückkehrt: wie gross die einzelnen Einfallswinkel? Gegeben die Quadratseite gleich a und die Entfernung des Punktes P von $AB = b$ und von $AD = c$.

57. Von einem leuchtenden Punkte P zwischen zwei ebenen Spiegeln, welche den Winkel γ mit einander bilden, erscheinen für ein Auge O eine Reihe von Bildern, welche entweder aus einer einmaligen Reflexion in dem einen oder in dem anderen Spiegel, oder in beiden Spiegeln, oder aus einer zweimaligen Reflexion in dem einen und einer einmaligen oder zweimaligen Reflexion in dem anderen Spiegel u. s. w. herrühren: die Länge des Lichtstrahls zwischen O und P zu bestimmen, welcher erfahren hat

a. eine einmalige
b. eine zweimalige } Reflexion in beiden Spiegeln:
c. eine $k$malige

Vorausgesetzt sei, dass P und O gleiche Entfernung r von der beiden Spiegeln gemeinschaftlichen Kante haben, in derselben Neigungsebene ACB der beiden Spiegel liegen und dass $PCA = \alpha$, $OCB = \beta$ gegeben sind.

58. Der Axenschnitt eines conischen Spiegels sei das gleichschenklige Dreieck ABB_1, auf der über B hinaus verlängerten Basis BB_1 befinde sich der leuchtende Punkt P: den Gang desjenigen Lichtstrahls zu bestimmen, der von P ausgehend nach einmaliger Reflexion in E an der Seite AB des Kegels parallel der Axe AC reflektirt wird: im Besonderen den Punkt F zu bestimmen, in welchem der reflektirte Strahl EO über E rückwärts verlängert die Basis CB trifft. Geg. $CP = a$, $CB = r$, $\measuredangle CAB = \alpha$.

59. (Anschl.) Wie Aufg. 58; jedoch soll der in E reflektirte Strahl den auf der verlängerten Axe liegenden Punkt O erreichen, wenn $CO = b$ gegeben ist.

60. (Anschl.) Zwei Punkte P und O, auf den über die Hypotenuse hinaus verlängerten Katheten des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC gelegen, sollen durch eine möglichst kurze, gebrochene Linie verbunden werden, deren Brechungspunkt E auf der Hypotenuse liegt, wenn gegeben sind die Katheten $a = 3$, $b = 4$, $CP = a_1 = 6$, $CO = b_1 = 7$: in welche Stücke wird die Hypotenuse durch E getheilt und wie gross ist der Einfallswinkel in E?

61. (Anschl.) Wie Aufg. 60; jedoch ist der Winkel ACB gleich γ gegeben: bekannt seien ausserdem die Seiten a und b und $CP = a_1$, $CO = b_1$.

62. Den Gang eines Lichtstrahls zu bestimmen, welcher von einem Punkte P ausserhalb eines sphärischen Convexspiegels mit dem Mittelpunkte C ausgehend, senkrecht zur Linie PC reflektirt wird. Gegeben $CP = a$ und der Radius der Kugel gleich r: wie gross ist der Einfallswinkel?

Aufg. 63—74. Brechung des Lichtes durch ebene Flächen.

63. Von einem leuchtenden Punkte D aus, der sich auf der einen Seite der geraden Linie AB, durch welche zwei Theile einer Ebene von verschiedenem optischen Brechungsvermögen getrennt werden, befindet, werde durch einen Lichtstrahl ein Punkt E auf der anderen Seite von AB erreicht auf dem gebrochenen Wege DCE, wo C auf AB liegt; der Brechungsexponent vom ersten ins zweite Medium sei n: die Zeit t zu bestimmen, welche zur Zurücklegung des Weges ACB erforderlich ist, wenn auch die Geschwindigkeiten des Lichtes in den Räumen DAB und EAB sich verhalten wie $n : 1$, und ebenso die Zeit t_1, innerhalb deren der Lichtstrahl den geradlinigen Weg DE zurücklegen würde. Gegeben $DC = e$, $EC = d$ und der Einfallswinkel α: $e = 5$, $d = 4$, $\alpha = 67°$, $n = 1{,}5$.

64. (Anschl.) Zu beweisen, dass wenn die Geschwindigkeiten des Lichtes oberhalb und unterhalb der Trennungslinie AB der beiden Medien sich wie $\sin\alpha : \sin\beta$ verhalten, wo α (der Einfallswinkel) grösser als β (der Brechungswinkel) ist, die gebrochene Linie DCE in kürzerer Zeit vom Licht zurückgelegt wird als die geradlinige Strecke DFE, wo F auf AB liegt.

65. Gang eines Lichtstrahles durch eine planparallele Platte. Gegeben der Einfallswinkel α, der Brechungsexponent n und die Dicke d der Platte: welchen Abstand hat der nach doppelter Brechung heraustretende Strahl von dem einfallenden Lichtstrahl?

Beispiel: $\alpha = 50^0$, $d = 1$, $n = 1{,}5$.

66. Ein Prisma werde durch einen Lichtstrahl in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene unter dem Einfallswinkel α getroffen: wie gross ist der Ablenkungswinkel δ nach zweimaliger Brechung, wenn der Brechungsexponent n und der brechende Winkel γ gegeben sind?

Beispiel: $\alpha = 20^0$, $\gamma = 40^0$, $n = 1{,}5$.

67. Der Querschnitt eines Prismas habe die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem brechenden Winkel α, auf die Kathetenfläche CA falle lothrecht ein Lichtstrahl DE, der die Hypotenusenfläche AB im Punkte F verlässt; in der Verlängerung von DEF sei senkrecht die Skala OM angebracht, so dass $FO = d$ ist; der gebrochene Strahl treffe diese Skala im Punkte H, so ist HFO der Ablenkungswinkel θ: $HO = h$ zu berechnen, wenn der Brechungsexponent n gegeben ist.

Beispiel: $\alpha = 30°$, $d = 100$, $n = 4/3$.

68. (Anschl.) Wie Aufg. 67; jedoch soll $h = 30$ gegeben sein und n berechnet werden.

69. An einer gewissen Stelle E, d. h. etwa in der Entfernung f von der brechenden Kante C eines Prismas mit dem brechenden Winkel γ tritt ein Lichtstrahl in dasselbe ein und verlässt das Prisma wieder in einem zweiten Punkte F, für welchen $CF = e$ gegeben ist: wie gross ist der Einfallswinkel ε_0 und der Austrittswinkel θ_0, wenn n der Brechungsexponent ist?

Beispiel: $e = 1$, $f = 0{,}75$, $\gamma = 60°$, $n = 4/3$.

70. (Anschl.) Welches ist für die speziellen Voraussetzungen der Aufg. 69 der höchste Werth, den n erreichen kann?

71. (Anschl.) Welches ist für einen gegebenen Werth von n der kleinste Werth für f, die Entfernung des Einfallspunktes von der brechenden Kante, algebraisch und numerisch für die Werthe $n = 1{,}5$, $\gamma = 60°$, und (zur Probe) wie gross ist alsdann der Einfallswinkel ε_0?

72. (Anschl.) Ein Lichtstrahl falle in das Prisma unter dem Winkel $\varepsilon_0 = 60°$: die Entfernung des Einfallspunktes I von der brechenden Kante C d. i. $CE = f$ zu bestimmen, wenn der gebrochene Strahl in F austreten soll und $CF = e$ gegeben ist. Gegeben: $n = 1{,}5$, $\gamma = 60°$, $e = 1$.

73. Ein Lichtstrahl tritt unter dem Einfallswinkel ε_0 in ein Prisma ein und verlässt dasselbe unter dem Austrittswinkel θ_0 nach doppelter Brechung: welche Beziehung findet zwischen den Winkeln ε_0 und θ_0 statt, wenn γ der brechende Winkel des Prismas und n der Brechungsexponent gegeben sind? Unter welcher Bedingung ist der Ablenkungswinkel möglichst klein? (Jochm. Phys. § 144.)

74. (Vergl. Aufg. 67.) In ein gleichschenklig-dreiseitiges Prisma mit horizontaler Grundfläche tritt ein Lichtstrahl senkrecht zu einer Seitenfläche und erreicht nach der Brechung an der zweiten Seitenfläche eine vertikale Wand, welche um 100cm von dem Austrittspunkte entfernt ist: wie breit ist auf dieser Wand das Spektrum, wenn der Brechungsexponent für das äusserste Roth 1,628 und für das äusserste Violet 1,671 sind? Gegeben der Brechungswinkel $\gamma = 30°$.

Aufg. 75—89. Brechung des Lichtes durch eine Kugelfläche.

75. Von dem Punkte P, welcher um a vom Mittelpunkt C einer Kugel mit dem Radius r entfernt ist, ($a > r$), gehen Lichtstrahlen aus, welche auf der convexen Kugelfläche eine einmalige Brechung erleiden: welchen Gang nimmt der äusserste der gebrochenen Strahlen, wenn n der Brechungsexponent gleich $1\frac{1}{3}$ gegeben ist?

a. Der gebrochene Strahl soll der Axe parallel sein, wie gross ist a? **b.** Der einfallende Strahl soll der Axe parallel sein: in welcher Entfernung b von C wird die Axe durch den gebrochenen Strahl getroffen? **c.** Es soll sich $a : b = \lambda : \mu$ verhalten: welchen Winkel bildet das Einfallsloth mit der Axe?

76. (Anschl.) Der von P ausgehende Lichtstrahl soll die Kugel so treffen, dass er nach einmaliger Brechung der Axe PC parallel ist: wie gross der Einfallswinkel, wenn das Verhältniss von $r : a$ gleich λ gegeben ist? Gegeben $\lambda = 0{,}5$, $n = \frac{4}{3}$.

77. (Anschl.) Der unter dem Winkel α einfallende Strahl soll parallel der Axe sein, den Schnittpunkt Q des gebrochenen Strahles mit der Axe, d. h. b (Aufg. 75b) zu bestimmen.

78. Den Einfallswinkel eines Lichtstrahls zu bestimmen für eine Glaskugel, der nach einmaliger Reflexion und doppelter Brechung die Kugel parallel der anfänglichen Richtung verlassen soll. Gegeben $n = 1{,}5$.

79. (Anschl. an 77.) Die Lage des leuchtenden Punktes P auf der Axe zu bestimmen, und zwar den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Axe bildet, für den Einfallswinkel α, wenn

a. $PC = QC$; b. $PC : QC = \lambda : \mu$ sein soll.

80. Vom leuchtenden Punkte P aus treffe ein Lichtstrahl einen brechenden Kreis, so dass das Einfallsloth mit der Axe PC den Winkel v bildet: den Punkt Q zu bestimmen, in welchem der gebrochene Strahl die Axe trifft, d. h. den Werth von $QC = b$, wenn $PC = a$ gegeben ist. — Welches ist der Grenzwerth von QC, wenn v sehr klein wird?

81. Vom Punkte P der Axe, welcher vom Mittelpunkte C eines brechenden Kreises die Entfernung a hat, $a > r$, fällt ein Lichtstrahl auf den Kreis unter dem brechenden Winkel α und verlässt nach zweimaliger Brechung den Kreis: in welchem Punkte Q der Axe durchschneidet er alsdann dieselbe?

82. (Anschl.) Den Winkel zu bestimmen, welchen der einfallende Strahl mit der Axe bildet, wenn das Verhältniss von $PC : QC = \lambda : \mu$ gegeben ist.

83. Ein Lichtstrahl trete in einen brechenden Kreis unter dem Einfallswinkel α und verlasse denselben nach zweimaliger Brechung und einmaliger Reflexion: den Ablenkungswinkel δ zu bestimmen, wenn der Brechungsexponent n ist. (Vergl. Jochm. Phys. § 161.)

a. Gegeben $\alpha = 30°$, $n = 4/3$; b. $\alpha = 59°$, $n = 4/3$.

84. (Anschl.) Wie Aufg. 83; jedoch soll der Lichtstrahl erst nach zweimaliger Reflexion im Innern des Kreises denselben verlassen.

a. Gegeben $\alpha = 30°$, $n = 4/3$; b. $\alpha = 72°$, $n = 4/3$.

85. (Anschl. an 84.) Für welchen Einfallswinkel kehrt nach doppelter Brechung und doppelter Reflexion der austretende Strahl parallel dem einfallenden zurück? (Cubische Gleichung.)

86. (Anschl.) Für welchen Einfallswinkel geht nach doppelter Brechung und doppelter Reflexion der austretende Strahl dem einfallenden parallel weiter?

87. Von einem leuchtenden Punkte A der Axe einer halbkugelförmigen Linse, der von der Linse die Entfernung a hat, wird dieselbe von einem Lichtstrahl getroffen, der mit der Axe den Winkel α bildet: die Entfernung b von der Linse zu bestimmen desjenigen Punktes B der Axe, welcher nach doppelter Brechung an beiden Linsenflächen durch den Strahl getroffen wird:

a. Wenn dem leuchtenden Punkte A die ebene Fläche der Linse zugewendet ist.

b. Wenn dem Punkte A die convexe Fläche der Linse zugewendet ist.

Numerisches Beispiel:
Gegeben $a = 2$, $r = 1$, $n = 1{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$.

88. Wie Aufg. 87; jedoch soll die Linse nunmehr doppelt convex sein, und zwar sollen die beiden Linsenflächen die Radien r_1 und r_2, die Linse selbst aber die Dicke d haben.

Numerisches Beispiel:
Gegeben $a = 8$, $r_1 = 4$, $r_2 = 3$, $d = 1$, $n = 1{,}5$, $\alpha = 10^\circ$.

89. Die gleiche Aufgabe (auch numerisch) für eine doppeltconcave Linse.



Resultate.

Cap. I.

§ 1.

1.	9,83661;	9,95833;	9,51563;	10,14060.
2.	9,93200;	8,91195;	10,36377;	9,50004.
3.	9,99855;	9,91460;	10,55067;	10,48694.
4.	9,76957;	9,31788;	8,86417;	8,24192.
5.	9,89791;	9,89009;	11,03953;	11,31062.
6.	9,67572;	9,91623;	9,35675;	10,08964.
7.	9,89704;	9,35520;	10,75427;	9,67504.
8.	9,32815;	9,94577;	10,05773;	9,38108.
9.	9,98624;	9,99989;	9,14477;	9,85919.
10.	8,55495;	9,82444;	7,27664;	8,73179.

11.	$\alpha = 13^\circ\, 15'$;	$\beta = 39^\circ\, 58'$;	$\gamma = 4^\circ\, 30'$;	$\delta = 41^\circ\, 42'$.
12.	$\alpha = 74^\circ\, 32'$;	$\beta = 89^\circ\, 24'$;	$\gamma = 56^\circ\, 51'$;	$\delta = 72^\circ\, 27'$.
13.	$\alpha = 27^\circ\, 53'$;	$\beta = 75^\circ\, 35'$;	$\gamma = 40^\circ\, 25'$;	$\delta = 8^\circ\, 54'$.
14.	$\alpha = 64^\circ\, 33'$;	$\beta = 7^\circ\, 2'$;	$\gamma = 2^\circ\, 27'$;	$\delta = 42^\circ\, 55'$.
15.	$\alpha = 1^\circ\, 25'$;	$\beta = 34^\circ\, 57'$;	$\gamma = 85^\circ\, 44'$;	$\delta = 55^\circ\, 3'$.
16.	$\alpha = 35^\circ\, 51{,}2'$;	$\beta = 37^\circ\, 45{,}3'$;	$\gamma = 3^\circ\, 21{,}1'$;	$\delta = 30^\circ\, 52{,}7'$.
17.	$\alpha = 76^\circ\, 20{,}7'$;	$\beta = 86^\circ\, 39{,}6'$;	$\gamma = 89^\circ\, 13'$;	$\delta = 83^\circ\, 57{,}5'$.
18.	$\alpha = 4^\circ\, 26{,}4'$;	$\beta = 62^\circ\, 20{,}7'$;	$\gamma = 65^\circ\, 6{,}1'$;	$\delta = 84^\circ\, 17{,}4'$.
19.	$\alpha = 26^\circ\, 49'$;	$\beta = 14^\circ\, 37{,}7'$;	$\gamma = 85^\circ\, 0{,}5'$;	$\delta = 44^\circ\, 58{,}3'$.
20.	$\alpha = 1^\circ\, 13{,}6'$;	$\beta = 86^\circ\, 33{,}1'$;	$\gamma = 0^\circ\, 26{,}8'$;	$\delta = 88^\circ\, 21{,}5'$.

21. $\alpha = 30°$; $\beta = 48° 11{,}4'$; $\gamma = 36° 52{,}2'$; $\delta = 51° 20{,}4'$.
22. $\alpha = 64° 9{,}5'$; $\beta = 53° 7{,}8'$; $\gamma = 21° 48{,}1'$; $\delta = 84° 17{,}4'$.
23. $\alpha = 60°$; $\beta = 45°$; $\gamma = 30°$; $\delta = 35° 15{,}9'$.
24. $\alpha = 17° 31{,}2'$; $\beta = 45° 39{,}3'$; $\gamma = 42° 5{,}1'$; $\delta = 45°$.
25. $\alpha = 18° 57{,}6'$; $\beta = 71° 2{,}4$; $\gamma = 35° 15{,}9'$; $\delta = 49° 6{,}4'$.

26a. $\alpha = 15°$; $\beta = 22° 30'$; $\gamma = 18°$; $\delta = 36°$.
26b. $\alpha = 12° 26{,}5'$; $\beta = 34° 25{,}4'$; $\gamma = 59° 41{,}2'$; $\delta = 44° 26{,}2'$.
27. $\alpha = 12° 12{,}2'$; $\beta = 64° 51{,}8'$; $\gamma = 23° 17{,}5'$; $\delta = 53° 49{,}5'$.
28. $\alpha = 14° 16{,}7'$; $\beta = 58° 56{,}8'$; $\gamma = 52° 23{,}6'$; $\delta = 73° 16{,}3'$.
29. $\alpha = 8° 33{,}5'$; $\beta = 61° 49{,}8'$; $\gamma = 49° 40{,}4'$; $\delta = 43° 32'$.
30. $\alpha = 15° 3{,}6'$; $\beta = 64° 25{,}5'$; $\gamma = 42° 23{,}5'$; $\delta = 54° 24{,}6'$.

---

31. $+0{,}98481$; $-0{,}93969$; $-1{,}73205$; $+1{,}19175$.
32. $-0{,}93969$; $+0{,}98481$; ∞; $-1{,}73205$.
33. $-0{,}64279$; $+0{,}5$; $-1{,}73205$; $+1{,}19175$.
34. $+0{,}86603$; -1; $-5{,}67128$; $+2{,}74748$.
35. $+0{,}64279$; $-0{,}5$; $+5{,}67128$; $-0{,}17633$.

---

36. $\alpha = 255° 30{,}7'$; $\beta = 168° 9{,}4'$; $\gamma = 123° 47{,}7'$; $\delta = 170° 0{,}8'$.
37. $\alpha = 166° 47{,}4'$; $\beta = 352° 17{,}5'$; $\gamma = 209° 15{,}7'$; $\delta = 227° 33{,}8'$.
38. $\alpha = 175° 33{,}6'$; $\beta = 297° 39{,}3'$; $\gamma = 245° 6'$; $\delta = 264° 17{,}4'$.
39. $\alpha = 228° 35{,}4'$; $\beta = 143° 7{,}8'$; $\gamma = 140° 11{,}7'$; $\delta = 130° 36{,}1'$.
40. $\alpha = 198° 26{,}1'$; $\beta = 312° 1{,}4'$; $\gamma = 219° 16{,}2'$; $\delta = 122° 15'$.

§ 2.

1. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. 2. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}$; 1.
3. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; -1; $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$. 4. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$; -1.
5. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$; ∞. 6. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$. 7. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$.
8. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $2+\sqrt{3}$; $\sqrt{2}-1$.
9. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2+\sqrt{3}$; $-2+\sqrt{3}$.
10. $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}-1$; $-\sqrt{2}+1$.

---

11. $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $\sqrt{1-0{,}4\sqrt{5}}$; $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
12. $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$; $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$; $\sqrt{1+0{,}4\sqrt{5}}$.
13. $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$; $-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$; $-\sqrt{1+0{,}4\sqrt{5}}$; $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.
14. $\frac{1}{8}(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$; $\frac{1}{8}(-\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}})$.
15. $\frac{1}{8}(1-\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}})$; $\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}})$.
16. $\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.
17. $\frac{1}{4}\sqrt{2(4-\sqrt{2}+\sqrt{6})}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
18. $\frac{1}{8}(-1-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}})$. **19.** $\frac{1}{8}(-\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5+\sqrt{5}})$.
20. $\frac{1}{8}(\sqrt{2}-\sqrt{10}+2\sqrt{5+\sqrt{5}})$. **21.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (sin 45°).
22. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. **23.** 2. **24.** 2. **25.** 4. **26.** $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{2}$.
28. $\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\cos 18°$. **29.** $\sqrt{1+0{,}4\sqrt{5}}=\operatorname{tg}54°$.
30. 1,25. **31.** 2. **32.** 10. **33.** 2. **34.** 0,75.
35. $\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)=\frac{1}{2}\sin 18°$. **36.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. **37.** $\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
38. $2(\sqrt{5}+1)=8\cos 36°$. **39.** $\sqrt{3}$. **40.** $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. (Wird sin 54° ersetzt durch cos 54°, so ergiebt sich 1).

§ 3.

1. $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$; $\alpha=30°$.
2. „ „ $=0{,}8$; „ „ $=0{,}75$; „ „ $=\frac{4}{3}$; „ $=36°52{,}2'$.
3. „ „ $=\frac{1}{3}\sqrt{5}$; „ „ $=0{,}4\sqrt{5}$; „ „ $=0{,}5\sqrt{5}$; „ $=41°48{,}1'$.
4. „ „ $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; „ „ $=1$; „ „ $=1$; „ $=45°$.
5. „ „ $=\sqrt{1-\lambda^2}$; „ „ $=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$; „ „ $=\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$.
6. $\sin\alpha=\frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{8}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\alpha=61°55{,}6'$.
7. „ „ $=\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}4$; $\alpha=157°22{,}8'$.
8. „ „ $=3\sqrt{0{,}11}$; $\operatorname{tg}\alpha=3\sqrt{11}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{11}}{33}$; $\alpha=84°15{,}7'$.
9. „ „ $=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $\operatorname{tg}\alpha=2-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=2+\sqrt{3}$; $\alpha=15°$.
10. „ „ $=\sqrt{1-\lambda^2}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$.

11. $\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\alpha = 0{,}6$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}75$; $\alpha = 53^\circ\, 7{,}8'$.

12. „ „ $= 0{,}4\sqrt{5}$; $\cos\alpha = 0{,}2\sqrt{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5$; $\alpha = 63^\circ 26{,}1'$.

13. „ „ $= \sqrt{0{,}5}$; $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -1$; $\alpha = 135^\circ$.

14. „ „ $= \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$;
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$; $\alpha = 36^\circ$.

15. „ „ $= \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\lambda}$.

16. $\sin\alpha = 0{,}1\sqrt{10}$; $\cos\alpha = 0{,}3\sqrt{10}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; $\alpha = 18^\circ 26{,}1'$.

17. „ „ $= \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$; $\alpha = 22^\circ\, 37{,}2'$.

18. „ „ $= 0{,}5$; $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\alpha = 150^\circ$.

19. $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = 1+\sqrt{2}$; $\alpha = 67^\circ 30'$.

20. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$; $\cos\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\lambda}$.

21. $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2-\sqrt{3}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{3}$; $\alpha = 15^\circ$.

22. $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$.

23. $\sin\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$; $\cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$; $\alpha = 54^\circ$.

24. $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = 1+\sqrt{2}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}-1$; $\alpha = 67^\circ\, 30'$.

25. $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\alpha = 0{,}5$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\alpha = 60^\circ$.

26. $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\alpha = -0{,}5$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\alpha = 240^\circ$.

27. $\sin\alpha = 2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}$; $\cos\alpha = 2\lambda^2-1$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2\lambda^2-1}$.

28. $\sin\alpha = 2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}$; $\cos\alpha = 1-2\lambda^2$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{1-2\lambda^2}$.

29. $\sin\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$; $\cos\alpha = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$.

30. $\sin\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$; $\cos\alpha = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda}$.

31. $3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$. **32**. $4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$. **33**. $\frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha^3}{1 - 3\operatorname{tg}\alpha^2}$.

33a. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha^3 - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}\alpha^2 - 1}$. **34**. $\sin\alpha(2\cos 2\alpha + 1)$. **35**. $\cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1)$.

36. $\frac{\sin 3\alpha}{2\cos 2\alpha + 1}$. **37**. $\frac{\cos 3\alpha}{2\cos 2\alpha - 1}$. **38**. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **39**. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

40. $2 - \sqrt{3}$, $(-1,\ 2 + \sqrt{3})$.

§ 4.

1. $\sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ - \alpha) = \sqrt{1 + \sin 2\alpha}$;
$\sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$.

2. $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; $2\operatorname{ctg} 2\alpha$. **3**. $\frac{\sin 45^\circ\cdot\sin(\alpha - 45^\circ)}{\sin 2\alpha}$; $\frac{\sin 45^\circ\cdot\sin(\alpha - 45^\circ)}{\sin 2\alpha}$.

4. $\cos 2\alpha$; $\frac{4\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. **5**. -1; $\frac{4\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. **6**. $2\cos\frac{\alpha^2}{2}$; $2\sin\frac{\alpha^2}{2}$.

7. $2\cos(45^\circ - \alpha/2)^2$; $2\sin(45^\circ - \alpha/2)^2$. **8**. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha/2$; $\frac{2\cos(45^\circ - \alpha/2)^2}{\sin\alpha}$.

9. $\frac{1}{\cos\alpha^2}$; $-\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha^2}$. **10**. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha^2}{2}$; $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2)^2$. **11**. $\frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}$; $\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ\cdot\sin\alpha}$. **12**. $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$; $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$. **13**. $\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha/2$.

14. $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2)$; $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **15**. $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$; $\frac{\cos(45^\circ - \alpha)^2}{\sin\alpha}$.

16. $\operatorname{ctg}\alpha/2$; $\operatorname{tg}\alpha/2$; $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2)$. **17**. $\cos\alpha^2$; $\sin(45^\circ - \alpha)^2$; $\cos(45^\circ - \alpha)^2$.

18. $\operatorname{ctg}\alpha^2$; $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)^2$; $\operatorname{tg}(2\alpha - 45^\circ)$. **19**. $\sin\alpha$; $\cos\alpha$.

20. $\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$; $2\cos(45^\circ - \alpha)$. **21**. $\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$; $2\operatorname{tg} 2\alpha$.

22. $\sin 2\alpha$; $\frac{4\operatorname{tg} 2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **23**. $\sin 2\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$. **24**. 0. **25**. $-\frac{3}{4}$.

26. $2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$;
$2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

27. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$ **28**. $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$; $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

29. $\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\dfrac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$. **30.** $\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; $\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$.

31. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; $-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

32. $-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha^2\cdot\cos\beta^2}$.

33. $\dfrac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha^2\cdot\sin\beta^2}$; $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha^2\cdot\cos\beta^2}$.

34. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$; $2\sin(\alpha+\beta)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}^2$.

35. $-2\sin(\alpha+\beta)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}^2$; $2\cos(\alpha+\beta)\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$.

36. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

37. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. **38.** $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; $-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

39. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$; $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

40. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **41.** $\dfrac{1}{\sin\alpha}$; $\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

42. $\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$. **43.** 2; $4\cos 2\alpha$. **44.** $\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha$.

45. $\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha$. **46.** $\sin\alpha\cdot\sin\gamma$. **47.** $\sin(\alpha-2\beta)\cdot\sin\gamma$.

48. $\cos\alpha\cdot\cos\gamma$. **49.** $-\cos(\alpha+2\beta)\cdot\cos\gamma$. **50.** $\sin\alpha\cdot\cos\gamma$.

51. $\sin(\alpha+3\beta)\cdot\cos\beta$. **52.** $\cos(\alpha+3\beta)\cdot\cos\beta$.

53. $\sin(3\alpha+7\beta)\cdot\sin\beta$. **54.** 0. **55.** 0.

56. $4\sin 45^\circ\cdot\sin\alpha/2\cdot\sin(45^\circ-\alpha/2)$; $4\sin 45^\circ\cdot\cos\alpha/2\cdot\sin(45^\circ-\alpha/2)$.

57. $\cos\alpha$; $\sin\alpha$. **58.** $\cos\alpha$; $-\sin\alpha$.

59. $2\sin\alpha\cdot\sin\beta\ \cos(\alpha+\beta)$; $-2\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$.

60. $2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$; $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

§ 5.

1. $4\cos\alpha/2\cdot\cos\beta/2\cdot\cos\gamma/2$. **2.** $4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

3. $1+4\sin(45^\circ-\alpha/4)\cdot\sin(45^\circ-\beta/4)\cdot\sin(45^\circ-\gamma/4)$.

4. $4\sin\alpha/2\cdot\sin\beta/2\cdot\cos\gamma/2$. **5.** $4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$.

6. $-1 + 4\cos(45^\circ - \alpha/_4) \cdot \cos(45^\circ - \beta/_4) \cdot \sin(45^\circ - \gamma/_4)$.
7. $1 + 4\sin\alpha/_2 \cdot \sin\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2$. **8.** $-1 - 4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.
9. $4\cos(45^\circ - \alpha/_4) \cdot \cos(45^\circ - \beta/_4) \cdot \cos(45^\circ - \gamma/_4)$.
10. $-1 + 4\cos\alpha/_2 \cdot \cos\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2$. **11.** $1 - 4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cos\gamma$.
12. $4\sin(45^\circ - \alpha/_4) \cdot \sin(45^\circ - \beta/_4) \cdot \cos(45^\circ - \gamma/_4)$.
13. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$. **14.** $\operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}2\beta \cdot \operatorname{tg}2\gamma$.
15. $\operatorname{tg}\alpha/_2 \cdot \operatorname{tg}\beta/_2 \cdot \operatorname{tg}\gamma/_2 + \frac{1}{\cos\alpha/_2 \cdot \cos\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2}$.
16. $-\operatorname{tg}\alpha/_2 \cdot \operatorname{tg}\beta/_2 \cdot \operatorname{ctg}\gamma/_2$. **17.** 1. **18.** $\operatorname{ctg}\alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg}\beta/_2 \cdot \operatorname{ctg}\gamma/_2$.
19. $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma + \frac{1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$. **20.** $-\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$.
21. $-\operatorname{ctg}2\alpha \cdot \operatorname{ctg}2\beta \cdot \operatorname{tg}2\gamma$. **22.** 1.
23. $-1 + 4\cos(45^\circ - \alpha/_2) \cdot \cos(45^\circ - \beta/_2)\cos\gamma/_2$.
24. $-4\cos(45^\circ - \alpha) \cdot \cos(45^\circ - \beta) \cdot \cos\gamma$.
25. $4\cos\alpha/_4 \cdot \cos\beta/_4 \cdot \sin(45^\circ - \gamma/_4)$.
26. $4\sin(45^\circ - \alpha/_2) \cdot \sin(45^\circ - \beta/_2) \cdot \sin\gamma/_2$.
27. $-4\sin(45^\circ - \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \beta) \cdot \cos\gamma$.
28. $4\sin\alpha/_4 \cdot \sin\beta/_4 \cdot \sin(45^\circ - \gamma/_4)$. **29.** $2 + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.
30. $2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$. **31.** $-2\sin2\alpha \cdot \sin2\beta \cdot \cos2\gamma$.
32. $1 - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$. **33.** $1 - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma$.
34. $2\cos\alpha/_2 \cdot \cos\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2$. **35.** $\cos\beta \cdot \cos\gamma$.
36. $2\cos\frac{\beta - \gamma}{2}$, oder $2\sin\alpha/_2$. **37.** $4\cos\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2$, oder 0.
38. $2\cos\frac{\beta - \gamma}{2}$, oder $-2\sin\alpha/_2$. **39.** $4\sin\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2$, oder 0.
40. $\sin\gamma^2$. **41.** $2\sin\frac{\gamma^2}{2}$. **42.** $-2\cos\gamma^2$. **43.** $\cos\frac{\gamma^2}{2}$.
44. $\cos\frac{\gamma^2}{2}$. **45** u. **46.** $2\sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos\alpha/_2$. **47.** $\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin\gamma$.
48. 0. **49.** 0. **50.** 2. **51.** 2. **52.** $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$.
53. $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}}$.

54. $\frac{\cos(\beta-\gamma)\cdot\cos(\gamma-\alpha)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

55. $\frac{\cos(\beta-\gamma)\cdot\sin(\alpha-\gamma)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

56. $2\sin\alpha/_2\cdot\sin\beta/_2\cdot\sin\gamma/_2$. 57. $2\sin\alpha/_2\cdot\cos\beta/_2\cdot\cos\gamma/_2$.

58. $2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$. 59. $2\sin2\alpha\cdot\sin2\beta\cdot\sin2\gamma$.

60. $2\cos\alpha/_2\cdot\cos\beta/_2\cdot\cos\gamma/_2$.

§ 6.

1. $4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

2. $4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

3. $4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

4. $4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

5. $2-\cos(\beta+\gamma)\cdot\cos(\gamma+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\beta)$.

6. $2+\cos(\beta+\gamma)\cdot\cos(\gamma+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\beta)$.

7. $-2\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\beta)$.

8. $2\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\beta)$.

9. $\sin(\alpha+\delta)\cdot\sin(\beta+\delta)$. 10. $\sin(\beta+\delta)\cdot\cos(\alpha+\delta)$.

11. $\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\alpha+\delta)$. 12. $\cos(\alpha+\delta)\cdot\cos(\beta+\delta)$.

13. $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}$.

14. $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\delta}$.

15. $\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}$.

16. $2\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\cos(\gamma+\delta)$.

17. $4\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

18. $-4\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

19. $4\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

20. $4 \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.

21. $4 \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

22. $4 \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.

23. $4 \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

24. $4 \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.

25. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$.

26. $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma - \frac{\cos (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}$.

27. $- \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$.

28. $- \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma}$.

29. $- 2 \sin (\beta - \gamma) \cdot \sin (\alpha - \gamma) \cdot \cos (\alpha + \beta)$.

30. $2 \sin (\beta - \gamma) \cdot \sin (\alpha - \gamma) \cdot \cos (\alpha + \beta)$.

31. $\sin(\alpha+\beta)^2$. **32.** $\sin(\alpha+\beta)^2$. **33.** $-4 \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$.

34. $- 1 + 4 \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

35. $- 4 \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

36. $4 \cos \left(45^\circ - \frac{\beta - \gamma}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{\gamma - \alpha}{2}\right) \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

37. $\operatorname{tg} (\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg} (\gamma - \alpha) \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \beta)$.

38. $- \operatorname{ctg} (\beta - \gamma) \cdot \operatorname{ctg} (\gamma - \alpha) \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \beta)$.

39. $2 - 2 \cos (\beta - \gamma) \cdot \cos (\gamma - \alpha) \cdot \cos (\alpha - \beta)$.

40. $- 2 \sin (\beta - \gamma) \cdot \sin (\gamma - \alpha) \cdot \cos (\alpha - \beta)$. **41.** $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2$.

42. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2$. **43.** $\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2 = \operatorname{ctg} \frac{60^\circ + \alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{60^\circ - \alpha}{2}$.

44. $- \operatorname{ctg} \frac{\alpha^2}{2}$. **45.** $- \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)^2$. **46.** $\operatorname{tg} \frac{45^\circ - \alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{45^\circ + \alpha}{2}$.

47. $-\operatorname{tg}\frac{\beta^2}{2}$. **48.** $-\operatorname{ctg}\frac{\beta^2}{2}$. **49.** $-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **50.** $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

51. $\operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. **52.** $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **53.** $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

54. $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. **55.** $\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. **56.** $\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)$.

§ 7.

1. $4\cos\alpha/_2\cdot\cos\alpha\cdot\sin 5\alpha/_2=\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin 5\alpha/_2}{\sin\alpha/_2}$.

2. $8\cos\alpha/_2\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 9\alpha/_2=\frac{\sin 4\alpha\cdot\sin 9\alpha/_2}{\sin\alpha/_2}$.

3. $16\cos\alpha/_2\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\sin 17\alpha/_2=\frac{\sin 8\alpha\cdot\sin 17\alpha/_2}{\sin\alpha/_2}$.

4. $\frac{\sin 2\beta\cdot\sin(\alpha+3\beta/_2)}{\sin\beta/_2}$. **4a.** $\frac{\sin 2\beta\cdot\cos(\alpha+3\beta/_2)}{\sin\beta/_2}$.

[Zur Summation von Reihen gleichartiger Funktionen (Sinus oder Cosinus) von Winkeln, welche eine arithmetische Reihe bilden, multiplicire man die Reihe, jenachdem die Glieder derselben gleiche oder abwechselnde Vorzeichen haben, mit dem doppelten Sinus oder Cosinus der halben Differenz der aufeinanderfolgenden Winkel und zerlege dann jedes der entstehenden Produkte in die zugehörige Differenz oder Summe.]

5. $\frac{\sin n\alpha/_2\cdot\sin(n+1)\alpha/_2}{\sin\alpha/_2}$. **6.** $\frac{\sin n\alpha^2}{\sin\alpha}$.

7. $\frac{\sin\frac{n\beta}{2}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)}{\sin\beta/_2}$. **8.** $\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\alpha/_2}$. **9.** $\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$.

10. $\frac{\sin\frac{n\beta}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)}{\sin\beta/_2}$. **11.** $\frac{\sin n\alpha\cdot\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}}{\cos\alpha/_2}$.

12. $-\frac{\sin n\alpha\cdot\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{\cos\alpha/_2}$. **13.** Wenn n eine gerade Zahl ist, wird $s=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{(n-1)\beta}{2}}{\cos\beta/_2}$;

wenn n eine ungerade Zahl ist, wird $s = -\frac{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) \cdot \sin\frac{n\beta}{2}}{\cos \beta/_2}$.

14. $-\frac{\sin 4n\alpha}{2\cos\alpha}$. 15. $\frac{\sin(4n+2)\alpha}{2\cos\alpha}$.

16. $\frac{\sin n\alpha \cdot \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{\cos \alpha/_2}$. 17. $\frac{\cos(n+1)\alpha \cdot \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{\cos \alpha/_2}$.

18. $\frac{\sin 2n\alpha^2}{\cos\alpha}$. 19. $\frac{\cos(2n+1)\alpha^2}{\cos\alpha}$. 20. $\frac{\cos(\alpha+n\beta)\cdot\cos\frac{(2n+1)\beta}{2}}{\cos \beta/_2}$.

21. $\frac{1}{4}\left(2n+1-\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right)$. 22. $\frac{1}{4}\left(2n-1+\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right)$.

23. $\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 4n\alpha}{\sin 2\alpha}$. 24. $\frac{n}{2}-\frac{\cos[2\alpha+(n-1)\beta]\cdot\sin n\beta}{2\sin\beta}$.

25. $\frac{n}{2}+\frac{\cos[2\alpha+(n-1)\beta]\cdot\sin n\beta}{2\sin\beta}$.

26. $\frac{\sin n\alpha - 2n\sin \alpha/_2 \cdot \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{4\sin {\alpha/_2}^2}$.

27. $\frac{n\sin \alpha/_2 \cdot \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin n{\alpha/_2}^2}{2\sin {\alpha/_2}^2}$.

28. $\frac{(n+1)\sin(\alpha+n\beta) - n\cdot\sin[\alpha+(n+1)\beta] - \sin\alpha}{4\sin {\beta/_2}^2}$.

29. $\frac{\cos\alpha + n\cdot\cos[\alpha+(n+1)\beta] - (n+1)\cdot\cos(\alpha+n\beta)}{4\sin {\beta/_2}^2}$.

30. $\frac{(2n-1)\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\sin n\alpha\cdot\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha^2}$.

31. $\frac{\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\beta - \sin(n+1)\alpha\cdot\sin n\beta}{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

32. $\frac{\sin\alpha - \sin(n+1)\alpha\cdot\cos n\beta + \sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\beta}{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

33. $\dfrac{\cos n\alpha \cdot \cos(n+1)\beta - \cos(n+1)\alpha \cdot \cos n\beta}{4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

34. $\dfrac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin\alpha \cdot \sin\delta}$. **35.** $\dfrac{\sin(\alpha-\delta)}{\cos\alpha \cdot \cos\delta}$. **36.** 0.

37. $\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha^2 \cdot \sin(n+1)\alpha}$. **38.** $\dfrac{\operatorname{tg} n\alpha}{\sin\alpha}$. **39.** $-\dfrac{\operatorname{tg} 2n\alpha}{\cos\alpha}$.

40. $-\dfrac{\sin 2n\alpha}{\cos\alpha^2 \cdot \cos(2n+1)\alpha}$. **41.** $\dfrac{\sin n\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha+n\beta)}$.

42. $\dfrac{\sin n\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos(\alpha+n\beta)}$. **43.** $\operatorname{tg} n(n+1)\,\alpha/_2$.

44. $\dfrac{\sin n(n+1)\,\beta/_2}{\sin\alpha \cdot \sin[\alpha + n(n+1)\,\beta/_2]}$.

§ 7a.

1. Es sei $a > b$: man setze $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$, so wird $a+b = \dfrac{b \cdot \cos(\varphi - 45^\circ)}{\cos\varphi \cdot \cos 45^\circ} = \dfrac{a \ \cos(\varphi - 45^\circ)}{\sin\varphi \cdot \cos 45^\circ}$ **2.** (Vergl. 1). Es wird $a - b = \dfrac{b \cdot \sin(\varphi - 45^\circ)}{\cos\varphi \cdot \cos 45^\circ}$. **3.** Für $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$ wird der Ausdruck gleich $\operatorname{ctg}(\varphi - 45^\circ)$. **4.** Gesetzt $a = \operatorname{ctg}\varphi$, so wird der Ausdruck gleich $\cos 2\varphi$. **5.** Gesetzt $\dfrac{a}{b} = \operatorname{ctg}\varphi$: Resultat wie in Aufg. 4. **6.** Gesetzt $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$, so wird der Ausdruck gleich $\dfrac{b}{\cos\varphi}$ oder $\dfrac{a}{\sin\varphi}$. **7.** Gesetzt $\dfrac{b}{a} = \sin\varphi$, so wird der Ausdruck gleich $a \ \cos\varphi$. **8.** Gesetzt $\dfrac{b}{a} = \cos\varphi$, so wird der Ausdruck gleich $2a \cdot \cos(45^\circ - \varphi/_2)$. **9.** Gesetzt $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sqrt{ab} \cdot \sin\gamma/_2}{a-b}$, so wird der Ausdruck gleich $\dfrac{a-b}{\cos\varphi}$. **10.** Gesetzt $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sqrt{ab} \cdot \cos\gamma/_2}{a-b}$, so wird der Ausdruck gleich $\dfrac{a-b}{\cos\varphi}$. **11.** Gesetzt $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\gamma = \operatorname{ctg}\varphi$, so wird der Ausdruck gleich $\dfrac{\cos\alpha \cdot \sin(\beta+\varphi)}{\sin\varphi}$.
12. Vergl. Aufg. 11; der Ausdruck ist etwa zu bringen auf die Form $\dfrac{\sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \beta)}{\sin\varphi}$.

§ 8.

1. 63° 26,1′. **2.** 26° 33,9′. **3.** 75° 31,4′. **4.** 30°. **5.** 51° 49,6′. **6.** 38° 10,4′. **7.** 43° 53′. **8.** 43° 52,1′. **9** 112° 37,2′. **10.** 30°. **11.** 60°. **12.** 30°. **13.** 41° 24,6′. **14.** 45°. **15.** 53° 7,8′. **16.** 26° 43,8′; 124° 2,5′. **17.** 115° 10,5′. **18.** 32° 20′; 249° 12,2′. **19.** 27° 25,5′. **20.** 90°; 210°. **21.** 30°. **22.** 60°; 180°. **23.** 37° 18,8′; 141° 2,9′. **24.** 60°. **25.** 26° 33,9′; 153° 26,1′. **26.** 35° 15,9′; 144° 44,1′. **27.** 45°; 135°. **28.** 30°; 210°. **29.** 0; 70° 31,7′. **30.** 51° 49,6′. **31.** 37° 45,7′. **32.** 75° 31,3′. **33.** 34° 15,8′. **34.** 16° 46,7′. **35.** 16° 46,7′. **36.** 20° 42,3′. **37.** 26° 48,7′. **38.** 23° 26,3′. **39.** 12° 15,3′; 48° 9,3′. **40.** 16° 47,7′. **41.** 18°; 54°. **41a.** $\sin x = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \cos \alpha$. **42.** 106° 2,7′; 136° 21,2′. **42a.** $\cos 2x = \frac{1-\alpha}{2\alpha - 1}\left(\alpha > \frac{2}{3}\right)$. **43.** $\cos 2x = \frac{1}{2-\alpha}$. **44.** 24° 5,7′. **45.** $\cos 2x = \frac{1}{\alpha - 2}$. **46.** 30°. **47.** $\cos 2x^2 + \frac{\alpha}{2(\alpha-2)}\cos 2x = \frac{1}{2}$. **48.** 60° od. 0°. **49.** $(5-3\alpha)\cos x^4 = 2(5-2\alpha)\sin x^2 \cdot \cos x^2 - (1-\alpha)\sin x^4$. **50.** $(10-3\alpha)\cos x^4 = 10(2-\alpha)\sin x^2 \cos x^2 + 2(1-2\alpha)\sin x^4$.

§ 9.

1. 30°. **2.** 66° 25,3′; 180°. **3.** 26° 33,9′; 105° 56,7′. **4.** 10° 54,1′; 100° 54,1′. **5.** 19° 23,3′; 228° 35,4′. **6.** 41° 24,6′; 120°. **7.** 63° 26,1′; 146° 18,6′. **8.** 50° 11,7′; 123° 41,4′. **9.** 196° 55,1′. **10.** 56° 55,2′; 139° 1,5′. **11.** 130° 38,9′. **12.** 55° 54′; 145° 54′. **13.** 24° 28,2′; 155° 31,8′. **14.** 61° 51′. **15.** 202° 47,7′. **16.** 135°; 64° 59′. **17.** 45°; 63° 26,1′. **18.** 16° 50,6′; 106° 50,6′. **19.** 64° 44,6′; 141° 49,4′. **20.** 60°. **21.** 14° 2,2′; 71° 33,9′. **22.** 135°; 18° 26,1′. **23.** 45°; 104° 2,2′. **24.** 90°; 45°. **25.** 31° 43′; 121° 43′. **26.** 54° 44,1′; 125° 15,9′. **27.** 62° 25,5′; 117° 34,5′. **28.** 18° 18,5′; 26° 41,5′. **29.** 66° 36′ 45″; 29° 58,2′. **30.** 69° 53,7′; 143° 47,7′. **31.** $\operatorname{tg} x^2 = -\frac{b-\alpha}{a-\alpha}$.

32. $\alpha \operatorname{ctg} x^2 - 2b \operatorname{ctg} x = a - \alpha$. **33.** $\alpha \operatorname{tg} x^2 - 2b \operatorname{tg} x = a - c$. **34.** $\operatorname{tg} x^2 = -\frac{b-\alpha}{a-b-\alpha}$ oder $\cos 2x = \frac{a-2\alpha}{a-2b}$. **35.** $\operatorname{ctg} x^2 = -\frac{b-\alpha}{a+b-\alpha}$ oder $\cos 2x = \frac{2\alpha - a}{a+2b}$. **36.** 68°28,4′; 7°29,4′. **37.** 15°. **38.** 109° 5,2′. **38a.** $\frac{\alpha^2}{2} \sin 2x = \pm \sqrt{1+\alpha^2} - 1$. **39.** $c \sin 2x = b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}$. **40.** 105°. **41** u. **42.** 155° 42,3′ und 114° 17,7′. **43.** $2 \sin 2x = \alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}$. **44.** 128°27,2′. **45** und **46.** 146° 15′ und 33° 45′. **47.** 45°; 63° 19′ und 26° 41′. **48.** 121° 22′ und 148° 38′. **49.** $a^2 \sin 2x = (2a+b)\, b$. **50.** $2a^2 \sin 2x = 2ac + b^2 \pm b\sqrt{4a^2 + 4ac + b^2}$. **51.** 20° 54,3′. **52.** 110° 54,3′. **53.** $a \sin 2x = b \pm \sqrt{b^2 + 2ac}$. **54.** 22° 30′; 54° 13′. **55.** 67° 30′; 35° 47′. **56.** 16° 50,7′; 73° 9,3′. **57.** $a \operatorname{tg} 2x^2 + 2b \operatorname{tg} x = -2c$. **58.** 108°. **59.** 41° 24,6′; 94° 46,8′. **60.** $\cos x^2 - 2a \cos x = b$. **61.** 180°; 120°. **62.** 0°; 60°. **63.** 77°20,4′. **64.** 102° 39,6′. **65.** 18°; 54°. **66.** 41° 24,6′. **67.** 51° 49,7′; 180°. **68.** 0°; 128° 10,3′. **69.** 72°; 144°. **70.** 22° 27,3′. **71.** $\sin 2x^2 = \frac{2}{\alpha}$. **72.** 63°26,1′. **73.** $b \sin 2x^2 + a \sin 2x = 2\alpha$. **74.** $(b - 2\alpha) \sin 2x^2 + a \sin 2x = -2\alpha$. **75.** 105°. **76.** 65°54,3′; 35°15,9′. **77.** $\operatorname{tg} x^4 - (3+\alpha) \operatorname{tg} x^2 + \alpha = 0$. **78.** $\alpha \cos 2x^2 + (\alpha + 1) \cos 2x = 1$. **79.** $\operatorname{tg} x^2 = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$. **80.** 67° 30′ oder 112° 30′; 22° 30′ oder 157° 30′.

§ 10.

a. Zur Lösung einer Gleichung von der Form $a \sin x + b \cos x = c$ führe man im Allgemeinen statt a und b bezüglich $\varrho \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi$ ein, d. h. $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a}$, so ergiebt sich für die Gleichung die Form $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\varrho} \left(= \frac{c \cos \varphi}{a} = \frac{c \sin \varphi}{b}\right)$.

1. 143° 7,8′. **2.** 143° 7,8′. **3.** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$. **4.** $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{x}{2}\right) = \frac{b}{a}$.

5. 30°. **6.** 36° 52,2′; 196° 15,6′. **7.** 36° 52,2′; 157° 22,6′. **8.** 64° 40′; 221° 35,6′. **9.** 62° 43,4′; 223° 32,2′. **10.** 6° 50,1′; 77° 8,4′. **11.** 53° 7,3′; 186° 52,7′. **12.** 54° 37,8′. **13.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{\alpha}{\varrho}$, $\alpha < \sqrt{a^2+b^2}$. **14.** $\alpha < \sqrt{b^2-a^2}$.

b. Man ersetze die linke Seite der Gleichung durch ein Produkt.

15. $60° + \alpha/_2$. **16.** 10° 17,6′. **17.** $90° - \alpha$. **18.** 74° 30,4′.
19. 61° 16′. **20.** 51° 23′. **21.** $\operatorname{tg} x = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.
22. $\operatorname{tg}(x + \alpha/_2) = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha/_2}$. **23.** $\alpha - 45°$.
24. $45° - \alpha$. **25.** $\operatorname{tg} x/_2 = \frac{b}{a}$. **26.** $\operatorname{tg} 3\,x/_2 = -\frac{a}{b}$.
27. $90^0 + \frac{\alpha}{2}$. **28.** $45^0 - \frac{\alpha}{2}$. **29.** $\frac{\beta-\alpha}{2}$. **30.** 27° 49,2.
31. 6° 11,2′. **32.** 85° 46,5′. **33.** 24° 30,6′. **34.** 129° 9,7′.
35. 65°. **36.** 15°; 195°. **37.** 22° 30′; 67° 30′; 112° 30′, u. s. w.
38. 15° u. s. w. **39.** 27° 22′; . . **40.** $1 > \alpha > \frac{1}{2}$. **41.** 45°; . .
42. 27° 22′; . . **43.** 30°; . . **44.** $1 > \alpha > \frac{1}{4}$. **45.** 33° 7,2′; . .
46. 29° 28,6′; . . **47.** 22° 30′; . . **48.** $1 > \alpha > \frac{1}{8}$. **49.** 36°; . .
50. 20° 10′; . . **51.** 21° 5,3′. **52.** $1 > \alpha > \frac{1}{16}$. **53.** $2x = 12^0 7{,}3'$.
54. $1 < \alpha < \sqrt{2}$. **55.** 70° 6,2′. **55a.** 19° 53,8′. **56.** 69° 17,7′.
57. 45°. **58.** 30° 16,6′; 59° 43,4′. **59.** 15°; 75°. **60.** 30°; 60°.
61. 34° 57,2′. **62.** $1 > \alpha > \frac{1}{8}$; $2x = 47^0 47{,}4'$; . . **63.** $4 > \alpha > \frac{15}{16}$; 40° 34,2′; 49° 25,8′. **64.** $1 > \alpha > \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $2x = 58^0$, . .
65. $1 > \alpha > \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$; 36° 42,7′; 20° 2,6′. **66.** 135°.
67. $\sin 2x = 2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2$; $-2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$. **68.** $\frac{3}{2} > \alpha > \frac{1}{2}$; 105°.
69. 135°; 15° 50,2′; 74° 9,8′. **70.** 135°; 45°. **71.** 135°; 27° 58,1′; 62° 1,9′. **72.** $2\frac{3}{4} > \alpha > \frac{3}{4}$; 96° 49,6′; 173° 10,4′.
73. 67° 30′. **74.** $-1 < \alpha < -\frac{3}{4}$; 45°; 22° 30′; 67° 30′.
75. $-\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{4}$; 45°; 13° 21,3′; 76° 38,7′. **76.** $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.
77. $\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$. **78.** (Vergl. § 7a, Aufg. 1.) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}$; $x = 51^0 16{,}2'$. **79.** 58° 22′. **80.** $x = -\alpha$;

$x=60^0$. **81.** 120^0. **82.** $49^0\,21{,}3'$. **83.** 36^0. **84.** $x_1=60^0$; $\cos x_2=0{,}5-\cos 2\alpha$. **85.** $x_1=120^0$; $\cos x_2=-0{,}5-\cos 2\alpha$. **86.** 108^0. **87.** $6x=48^0\,35{,}4'$. **88.** $32^0\,18{,}6'$. **89.** $33^0\,12{,}6'$; $42^0\,7{,}9'$. **90.** $\cos 2x=-\operatorname{ctg} 2\alpha^2$.

§ 11.

1. $x=9^0\,36{,}9'$. **2.** $x=6^0\,1{,}7'$. **3.** $x=33^0\,41{,}4'$. **4.** $x=68^0\,36{,}8'$. **5.** $x=44^0\,43{,}8'$. **6.** $x=66^0\,8{,}2'$. **7.** $x=30^0$. **8.** $x=26^0\,26{,}8'$. **9.** $x=27^0\,9{,}8'$. **10.** $x=20^0\,28{,}5'$; $y=7^0\,37{,}6'$. **10a.** $x=71^0\,33{,}9'$ oder $=135^0$; $y=45^0$ oder $=108^0\,26{,}1'$. **11.** $x=64^0\,20{,}4'$. **12.** $58^0\,57'$. **13.** $x=60^0\,12{,}9'$. **14.** $x=40^0\,36{,}5'$. **15.** 105^0. **16.** $x=33^0\,10{,}8'$. **17.** $x=67^0\,53{,}6'$. **18.** $57^0\,58{,}5'$. **19.** $x=56^0\,22{,}8'$. **20.** $x=30^0\,11{,}8'$. **20a.** $27^0\,29{,}4'$. **21.** $x=44^0\,28'$. **22.** $x=42^0\,38{,}8'$. **23.** $158^0\,4{,}6'$. **24.** $x=80^0$.

24a. $\sin\dfrac{x+y^2}{2}+2\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha/_2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}=\cos\alpha/_2^2$.

25. $110^0\,42{,}3'$. **26.** $x=31^0\,15{,}4'$. **27.** $x=18^0\,26{,}1'$; $y=28^0\,19'$. **28.** $x=31^0\,15{,}4'$; $y=51^0\,6{,}2'$. **29.** $x=42^0\,50{,}7'$; $y=12^0\,9'$. **30.** $x=130^0\,44{,}1'$; $y=70^0\,44{,}1'$. **31.** $x=162^0\,58{,}4'$; $y=73^0\,10{,}4'$. **31a.** $x=341^0\,44{,}9'$; $y=101^0\,31{,}1'$. **32.** $x=388^0\,30{,}3'$ ($406^0\,27{,}2'$); $y=102^0\,14{,}7'$ ($143^0\,11{,}2'$).

32a. $\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\alpha}{\beta}$; $\cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. **33.** $x=30^0\,10{,}7'$ ($348^0\,28{,}9'$); $y=48^0\,21{,}5'$ ($71^0\,44{,}9'$). **34.** $x=60^0\,33{,}1'$; $y=42^0\,7{,}7'$. **34a.** $\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\alpha}{\beta}$; $\sin\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

35. $x=101^0\,31'$; $y=108^0\,15'$. **36.** $x_1=81^0\,29{,}9'$; $y_1=100^0\,25{,}1'$; $x_2=29^0\,17{,}2'$; $y_2=34^0\,34{,}3'$.

37. $\sin x^2=\dfrac{1-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$; $\cos y=\dfrac{1+\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

38. $\sin x^2=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\beta^2}$; $\sin y=\dfrac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

39. $\cos x^2=\dfrac{\gamma^2(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2}$; $\cos y^2=\dfrac{\delta^2(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta_2}$.

39a. Wie Aufg. 39; nur ist $\cos y$ durch $\sin y$ zu ersetzen.

40. $\operatorname{tg}\frac{x-y^2}{2}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}$; $\operatorname{tg}\frac{x+y^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha-\beta)\cdot(\alpha\delta+\beta\gamma)}$.

40a. Zurückzuführen auf Aufg. 39 durch die Gleichung: $\sin x:\sin y=\alpha\gamma:\beta\delta$. **40b.** Zurückzuführen auf 39a.

41. $\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{a}{2b}$; $x=292^0\,58{,}5'$; $y=67^0\,1{,}5'$.

42. $\operatorname{tg}\frac{x+y^2}{2}=\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$; $x=264^0\,14{,}1'$; $y=155^0\,45{,}9'$.

43. $\cos x=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta$; $\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha/_2}$. **44.** $\operatorname{tg}x=\frac{a\sqrt{1-\delta^2}}{b+\delta a}$; $\operatorname{tg}y=\frac{b\sqrt{1-\delta^2}}{a+\delta b}$. **45.** $\operatorname{ctg}x=\frac{a\sqrt{1-\delta^2}}{b-\delta a}$; $\operatorname{ctg}y=\frac{b\sqrt{1-\delta^2}}{a-\delta b}$.

46. $\operatorname{tg}x=\frac{a\sqrt{1-\delta^2}}{b-\delta a}$; $\operatorname{ctg}y=\frac{b\sqrt{1-\delta^2}}{\delta b-a}$.

47. $\operatorname{ctg}x=\frac{a\sqrt{1-\delta^2}+b}{\delta a}$; $\operatorname{ctg}y=\frac{b\sqrt{1-\delta^2}+a}{\delta b}$.

48. $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{(a+b)^2+4\delta^2ab}-(a+b)}{2\delta b}$.

49. $2b\cdot\operatorname{ctg}x=\delta(a+b)+\sqrt{\delta^2(a+b)^2+4ab}$.

50. $\sin x=\frac{1}{\alpha}$. **50a.** $\sin x=1$. **51.** $\sin x^2+\sin y^2-\sin z^2=$ $=\sin\varDelta^2-2\sin(\varDelta-x)\cdot\sin(\varDelta-y)\cdot\cos(\varDelta-z)$, folglich für $\varDelta=180^0$: $\cos z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ u. s. w. (der Cosinussatz). **52.** Es ist $\cos x^2+\cos y^2-\cos z^2=\cos\varDelta^2+$ $+2\sin(\varDelta-x)\cdot\sin(\varDelta-y)\cdot\cos(\varDelta-z)$; für $\varDelta=90^0$: $\sin z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ u. s. w. **53.** Es ist $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=$ $=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z+\frac{\sin\varDelta}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z}$, für $\varDelta=180^0$: $\operatorname{tg}x^2=\frac{a(a+b+c)}{bc}$. **54.** Es ist $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}z=$ $=\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y\cdot\operatorname{ctg}z-\frac{\cos\varDelta}{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}$, folglich für $\varDelta=90^0$: $\operatorname{ctg}x^2=\frac{a(a+b+c)}{bc}$ u. s. w. **55.** $\sin x^2+\sin y^2-\sin z^2=$ $=\sin\varDelta^2-2\sin(\varDelta-x)\sin(\varDelta-y)\cdot\cos(\varDelta+z)$, folglich für $\varDelta=0$: $\cos z=\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$ u. s. w.

56. Für $\Delta = 180^0$ ergiebt sich $\cos z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ u. s. w.

57. $\sin z = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$ u. s. w. **58.** $\operatorname{tg} z^2 = \frac{c(c-a-b)}{ab}$ u. s. w.

59. $\operatorname{ctg} z^2 = \frac{c(c-a-b)}{ab}$ u. s. w. **60.** $\cos z^2 = \frac{(a+b)^2}{4(c^2+ab)}$, u. s. w.

61. $\operatorname{tg} u = \frac{b}{a}$; $x = \sqrt{a^2+b^2}$. **62.** $\cos u = \frac{a}{b}$; $x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

63.*) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + u\right) = \frac{a+b}{a-b} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$; $x \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + u\right) = \frac{a-b}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

64.*) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + u\right) = \frac{a+b}{b-a} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$$x \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + u\right) = \frac{b-a}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

65.*) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^0 + u\right) = \frac{a+b}{a-b} \cdot \operatorname{ctg}\left(45^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

$$x \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + u - 45^0\right) = \frac{a+b}{2\sin\left(45^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

66. $\sin(\alpha + \beta + 2u) = \frac{a+b}{a-b} \cdot \sin(\alpha - \beta)$;

$$x^2 - (a-b) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) \cdot x + ab = 0.$$

67. $\sin(\alpha + \beta + 2u) = \frac{2a}{b} - \sin(\alpha - \beta)$;

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{b^2} = \frac{2a}{b}\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta)^2.$$

---

*) Um x zu bestimmen, wendet Gauss (theor. mot. § 78) folgende Methode an: er multiplicirt die erste Gleichung mit $\sin(\varphi - \beta)$, die zweite mit $\sin(\varphi - \alpha)$, so ergiebt sich durch Subtraction

1. $x \,.\, \sin(\varphi + u) \,.\, \sin(\alpha - \beta) = a\sin(\varphi - \beta) - b\sin(\varphi - \alpha)$,

ferner durch Multiplication bezüglich mit $\cos(\varphi - \beta)$ und $\cos(\varphi - \alpha)$:

2. $x \,.\, \cos(\varphi + u) \,.\, \sin(\alpha - \beta) = a\cos(\varphi - \beta) - b\cos(\varphi - \alpha)$:

aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich nunmehr:

3. $x^2 \,.\, \sin(\alpha - \beta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos(\alpha - \beta)$.

Dieses Resultat ist ganz unabhängig von φ und entspricht sowohl der Aufgabe 63, weil für $\varphi = \alpha$ die Gleichungen (1) und (2) in die der Aufg. 63 übergehen, als auch der Aufg. 64, weil diese Aufgabe aus Aufg. 63 herzuleiten ist, indem man statt α und β bezüglich $\pi/_2 + \alpha$ und $\pi/_2 + \beta$ (Anm. zu Seite 181) einführt, wobei $\alpha - \beta$ ungeändert bleibt.

Die Aufg. 65 ergiebt sich aus 63, indem man statt β einführt $\beta + \pi/_2$; es ergiebt sich:

$x^2 \,.\, \cos(\alpha - \beta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin(\alpha - \beta)$. (Vergl. § 22 Aufg. 57.)

68. $\operatorname{tg}\frac{u+v}{2}=\frac{a}{b}$; $\cos(u-v)=\frac{a^2+b^2}{2x^2}-1$;

$$x^2+\frac{c(a^2+b^2)}{4ab}x=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

69. $\sin u=\frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x=a\cos u+b\sin u$; $y=-a\sin u+b\cos u$.

69a. $\cos u=\frac{\pm d}{\sqrt{a^2+b^2}}$; x und y wie in Aufg. 69.

70. $\operatorname{tg}2u=\frac{a\cos\alpha+b\sin\alpha}{b\cos\alpha-a\sin\alpha}$, oder $u=\frac{\varphi+\alpha}{2}$, wenn $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}$;

x und y wie in Aufg. 69.

§ 12.

1. $\operatorname{tg}\alpha/_2$; $\operatorname{ctg}\alpha/_2$. **2.** $\operatorname{tg}(45^0-\alpha/_2)$; $\operatorname{ctg}(45^0-\alpha/_2)$. **3.** $\operatorname{tg}\alpha/_2$; $-\operatorname{ctg}\alpha/_2$. **4.** $\operatorname{ctg}(45^0-\alpha/_2)$; $-\operatorname{tg}(45^0-\alpha/_2)$. **5.** $\cos\alpha/_2$; $\sin\alpha/_2$. **6.** $\sin(45^0-\alpha/_2)$; $\cos(45^0-\alpha/_2)$. **7.** $x^2=\frac{2\cos{\alpha/_2}^2}{\cos\alpha}$; $-\frac{2\sin{\alpha/_2}^2}{\cos\alpha}$. 8. $x^2=\frac{2\cdot\cos(45^0-\alpha/_2)^2}{\sin\alpha}$; $-\frac{2\sin(45^0-\alpha/_2)^2}{\sin\alpha}$.

9. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$; $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. **9a.** $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$; $-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

10. $2\sin(\alpha\pm60^0)$. **10a.** $2\sin(\alpha-30^0)$; $-2\sin(\alpha+30^0)$.

Zur Form α: Man führe ein $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ac}}{b}$, so ergiebt sich: $x_1=-\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $x_2=-\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

11. $-0{,}1789$. **11a.** $0{,}3806$. **12.** -4; $-0{,}6615$.

13. $-0{,}10091$; $-2{,}2158$. **14.** $1{,}4423$ $(\sqrt[3]{3})$.

15. $-1{,}4142$, $(-\sqrt{2})$. **16.** $1{,}7321$ $(\sqrt{3})$ **17.** $0{,}1$; $0{,}031187$.

18. $-0{,}5547$; $\cos2\alpha<{}^1/_7$ d. h. $\alpha>40^0\,33{,}6'$. **19.** $-1{,}135$; $-0{,}55696$; $\alpha>45^0$.

20. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(45^0-\alpha/_2)$; $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(45^0+\alpha/_2)$.

Zur Form β: Man führe ein $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{ac}}{b}$, so ergiebt sich $x_1=\sqrt{\frac{c}{a}}\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $x_2=-\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

21. — 3,1234. **22.** — 0,8947. **23.** 2,2361 $(\sqrt{5})$; — 2,4588.
24. 2,089. **25.** — 2,632. **26.** 1,1996; — 0,33431.
27. 0,50278; — 0,40695. **28.** — 0,46631; 2,14451.
29. 0,8905; — 2,0821. **30.** $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg} 22^0\,30'$; $-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 22^0\,30'$.

Zur Form γ: Zur Bestimmung der Winkel u und v dienen die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{-b}{a-c}; \quad \cos(u-v) = \frac{a+c}{a-c}\cos(u+v)$$
$$= -\frac{a+c}{b}\sin(u+v).$$

31. $\operatorname{tg} 34^0\,6' = 0{,}67705$. **32.** $\operatorname{tg} 120^0 = -\sqrt{3}$.
33. $\operatorname{tg} 70^0 = 2{,}7475$; $\operatorname{tg} 94^0\,29' = -12{,}754$.
34. — 1,291 $(-\tfrac{1}{3}\sqrt{15})$; 1,5275 $(\tfrac{1}{3}\sqrt{21})$.
35. $\operatorname{tg} 144^0\,43{,}7' = -0{,}7073$; — 0,517.
36. $\operatorname{tg} 62^0\,12{,}4' = 1{,}8972$; — 0,83854.

§ 13.

1. 2,0406, 1,3579. **2.** $x = 3{,}6056\ (\sqrt{13})$, $y = 3{,}3166\ (\sqrt{11})$.
3. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}{}^{\alpha}/_2$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}{}^{\alpha}/_2$. **4.** $x = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg} 22^0\,30'$, $y = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 22^0\,30'$. **5.** Man setze $x = 2\cos u$, $y = 2\sin u$, $x_1 = 0{,}19111$, $y_1 = 1{,}9909$, $x_2 = 1{,}9867$, $y_2 = 0{,}23022$.
6. $x = \sqrt{a}\cdot\cos u$, $y = \sqrt{a}\cdot\sin u$; 1,2599 $(\sqrt[3]{2})$; 1,4422 $(\sqrt[3]{5})$.
7. (Wie 6.) 2,6448, 0,8118. **8.** $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $\frac{a\alpha}{b\beta} = \operatorname{tg}\varphi$, $\sin(\varphi + u) = \frac{\gamma}{b\beta}\cdot\cos\varphi\left(= \frac{\gamma}{a\alpha}\cdot\sin\varphi\right)$. **8a.** $x = -0{,}758$, $y = 1{,}7983$. **9.** $x = b\cos u$, $y = b\sin u$, $x = 8{,}6603\ (5\sqrt{3})$, $y = 3{,}4641\ (2\sqrt{3})$. **10.** $x = \varrho\cdot\cos\varphi$, $y = \varrho\cdot\sin\varphi$,
$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a-\alpha}{b+\beta}},\quad \varrho^2 = \frac{c^2}{2\cos 45^0\cdot\sin(2\varphi - 45^0)}.$$
11. $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$, $\operatorname{tg}(u+v) = \alpha$, $\sin(u-v) = \beta$.

12. $\cos\frac{x-y^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = 0{,}25$, $x_1 = 90^0$, $y_1 = 30^0$, $x_2 = 166^0\,46{,}3'$, $y_2 = -46^0\,46{,}3'$. 13. $\sin x = 0{,}6$, $\sin y = 0{,}5$.

14. $4\sin\frac{u+v^2}{2} + 2\sin\frac{u+v}{2} = 3$, $\frac{u+v}{2} = 40^0\,38{,}8'$.

15. $x = a\sin u$, $y = b\sin v$, $\sin(u+v) = \frac{c^2}{ab}$, $\cos\frac{u-v}{2} = \frac{\gamma ab}{c^2}\cdot\cos\frac{u+v}{2}$.

16. $x = a\cdot\sin u$, $y = b\sin v$; $\sin(u+v) = \frac{c^2}{ab}$, $\cos\frac{u-v}{2} = \frac{d^2}{c^2}\sin\frac{u+v}{2}$. 17. $x = a\sin\varphi$, $y = a\cos\varphi$, $u = b\sin\psi$, $v = b\cos\psi$, $ab\sin(\varphi-\psi) = c^2$, $ab\cos(\varphi+\psi) = -d^2$. 18. $\varphi+\psi = 61^0\,26{,}3'$, $\varphi-\psi = 17^0\,1{,}5'$, $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2}$, $u = \sqrt{6}$, $v = 1$.

§ 14.

1. a. $\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$. b. $\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$. c. $\cos n\alpha + i\sin n\alpha$. d. $\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}$.

2. a. $\varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wo $\varrho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha = \frac{a}{\varrho}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\varrho}$.
b. $\sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$ oder $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ *).
c. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. d. $\cos 0 + i\sin 0$ oder $\cos 2\pi + i\sin 2\pi$. e. $\cos\pi + i\sin\pi$. f. $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.
g. $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

*) Zur leichteren Uebersicht ist hier und in der Folge für die aliquoten Theile von 360^0 oder Vielfachen von 360^0 die Bezeichnung gewählt der zugehörigen Bogen oder Arcus für den Radius 1, sind also bezüglich statt der aliquoten Theile von 360^0 oder Vielfachen von 360^0 eingeführt die aliquoten Theile von 2π oder Vielfachen von 2π, so dass also z. B.

$\cos 45^0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^0 = 1$; $\mathrm{tg}\,300^0 = \mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

3. a. $\varrho = 5$, $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = -4/5$, $\cos\alpha/2 = \sqrt{0{,}8}$, $\sin\alpha/2 = -\sqrt{0{,}2}$, folglich $x = \pm(2 - i)$.

b. $x = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right) = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}-2} - i\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)$.

c. $x = a \pm i$. d. $x = 1 - i$, $-3 - i$. e. $x = \pm(1 + i)$, $y = \pm(-1 + i)$. f. x oder $y = \pm(i - 2)$ oder $\pm(i + 2)$.

4. $\varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, wo $\varrho = \sqrt{\frac{c}{a}}$ und $\cos\varphi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}}$.

5. a. $-0{,}95002 \pm 1{,}3776 \cdot i$. b. $0{,}42258 \pm 0{,}68999 \cdot i$.

6. $4x^2 + 7x + 16 = 0$; (bezüglich $8x^2 + 45x + 64 = 0$).

7. $32x^2 + 123x + 1024 = 0$; (bez. $x^2 + 15{,}775x + 128 = 0$).

8. $x^2 - (a^4 - 4a^3b + 2b^2)\,x + b^4 = 0$. **9.** $\varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, wo $\varrho = a$ und $\cos\varphi = \frac{b}{2a}$. **10.** a. -1; $\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$ d. i. $-\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{-3})$. b. -1, $\cos\frac{5\pi}{3} \pm i\sin\frac{5\pi}{3}$ d. i. $\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{-3})$. c. i, $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$; $\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$ d. i. $-\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$. d. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ d. i. $i - 1$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ d. i. $\frac{1}{2}[1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\,i]$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{12} + i\sin\frac{25\pi}{12}\right)$ d. i. $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\,i]$.

11. a. $\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 + i)$, $\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 - i)$. b. Gesetzt $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \alpha$ und $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \beta$ und $\alpha + \beta i = w$, so sind die vier Wurzeln $\pm w$, $\pm wi$.
c. Gesetzt $\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 - 3i) = w$, so sind die vier Wurzeln $\pm w$, $\pm wi$.

12. a. $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$. b. $\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}\ [\sqrt{3} - 1 \pm (\sqrt{3} + 1)\,i]$.

13. a. $(x^2 - x\sqrt{3} + 1) \cdot (x^2 + x\sqrt{3} + 1)$.
b. $[x^2 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{3} - 1)\,x + 1] \cdot [x^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{3} - 1)\,x + 1]$.

14. Man setze $x + \frac{1}{x} = y$, so ist zu lösen die quadratische

Gleichung $y^2 + ay + b - 2 = 0$: die Wurzeln dieser Gleichung sind $y_1 = \sqrt{b-2} \cdot \operatorname{tg} u$ und $y_2 = \sqrt{b-2} \cdot \operatorname{ctg} u$, wo $\sin 2u = \frac{2\sqrt{b-2}}{-a}$, weiter sei $x = \operatorname{tg} v$, so hat man

$\sin 2v = \frac{2}{\sqrt{b-2}} \operatorname{tg} u$ oder $= \frac{2}{\sqrt{b-2}} \operatorname{ctg} u$. Werden die Wurzelwerthe von x aus der Gleichung $x + \frac{1}{x} = y$ imaginär, d. h. ist $y < 2$, so setze man $x_1 = \cos\varphi + i \sin\varphi$, $x_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$, d. h. $2\cos\varphi = y$ u. s. w. **15.** $-1{,}4336$, $-0{,}69753$; $1{,}9641$; $0{,}50913$.

16. $0{,}95095 \pm 0{,}30943 \cdot i$, $0{,}27777$; $3{,}6002$.

17. $0{,}07566 \pm 0{,}99715 \cdot i$, $0{,}38422 \pm 0{,}91902 \cdot i$.

18. $\cos n\alpha = \sum_0 (-1)^k \cdot (n)_{2k} \cdot \cos\alpha^{n-2k} \cdot \sin\alpha^{2k}$,

$\sin n\alpha = \sum_0 (-1)^k \cdot (n)_{2k+1} \cdot \cos\alpha^{n-2k-1} \cdot \sin\alpha^{2k+1}$.

19. $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$.

$\cos 3\alpha = \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha \cdot \sin\alpha^2$.

$\cos 4\alpha = \cos\alpha^4 - 6\cos\alpha^2 \cdot \sin\alpha^2 + \sin\alpha^4$.

$\cos 5\alpha = \cos\alpha^5 - 10\cos\alpha^3 \cdot \sin\alpha^2 + 5\cos\alpha \cdot \sin\alpha^4$.

$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

$\sin 3\alpha = 3\cos\alpha^2 \cdot \sin\alpha - \sin\alpha^3$.

$\sin 4\alpha = 4\cos\alpha^3 \cdot \sin\alpha - 4\cos\alpha \cdot \sin\alpha^3$.

$\sin 5\alpha = 5\cos\alpha^4 \cdot \sin\alpha - 10\cos\alpha^2 \cdot \sin\alpha^3 + \sin\alpha^5$.

20. Vergl. Algebr. Aufg. § 40, Aufg. 12.

21. $2\cos\alpha^2 = \cos 2\alpha + 1$.

$4\cos\alpha^3 = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$.

$8\cos\alpha^4 = \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$.

$16\cos\alpha^5 = \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$.

$-2\sin\alpha^2 = \cos 2\alpha - 1$.

$-4\sin\alpha^3 = \sin 3\alpha - 3\sin\alpha$.

$8\sin\alpha^4 = \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3$.

$16\sin\alpha^5 = \sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha$.

22. $\cos x = \sum_0^\infty (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sin x = \sum_0^\infty (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

23. a. $\cos 1^0 = 0{,}999848$, $\sin 1^0 = 0{,}017452$.
b. $\cos 12^0 = 0{,}978148$, $\sin 12^0 = 0{,}207912$.
c. $\cos 17^0 = 0{,}956305$, $\sin 17^0 = 0{,}292372$.
d. $\cos \delta = 0{,}915241$, $\sin \delta = 0{,}402906$.

24. $e^{xi} = \cos x + i \sin x$. **25.** $\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$; $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$. **26.** Vergl. Algebr. Aufg. § 41, Aufg. 14: $x = \sum_0^\infty (-1)^{2k+1} \cdot \frac{\operatorname{tg} x^{2k+1}}{2k+1}$, $\operatorname{tg} x \leqq 1$. **27.** $\pi = \sum_0^\infty (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1}$ oder $= \frac{16\sqrt{3}}{3} \sum_1^\infty \frac{k}{(4k-3)(4k-1)\cdot 3^{2k-2}} = 3{,}14159265$.

§ 15.

1. Gesetzt $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{a}{b}\right)^3$, so ergiebt sich

$x_1 = a\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \varphi/_2}$, $y_1 = -a\sqrt[3]{\operatorname{tg} \varphi/_2}$,

$x_2 = x_1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $y_2 = y_1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

$x_3 = x_1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $y_3 = y_1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Gesetzt $\sin\varphi = \left(\frac{a}{b}\right)^3$, so ergiebt sich: $x_1 = a\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi/_2}$, $y_1 = a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\varphi/_2}$ u. s. w. (Vergl. 1). **3.** Gesetzt $\cos\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^3$, so ergiebt sich $x_1 + y_1 = 2a\cos\varphi/_3$, $x2 + y_2 = 2a\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}$, $x_3 + y_3 = 2a\cdot\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}$. **4.** Die Lösung dieser Aufgabe ist durch die Aufg. 1 — 3 zu erledigen. **5.** a. 6; $-3 \pm \sqrt{-5}$. b. 1,1893; $-0{,}59465 \pm 1{,}9254\,i$. c. -2; $1 \pm 2\sqrt{-1}$. d. 2,5; $-1{,}25 \pm 0{,}25\sqrt{-0{,}6}$. e. $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{-107})$. **6.** a. 3; -1; -2. b. -2; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$. c. 2; -1; -1. d. $2\cos \alpha/_3$; $2\cos\frac{\alpha + 2\pi}{3}$; $2\cos\frac{\alpha + 4\pi}{3}$. e. 2,4; $-1{,}2 \pm \frac{1}{15}\sqrt{199}$. f. $-1{,}6$; $0{,}8 \pm \sqrt{0{,}4}$. **7.** a. -5; $4 \pm \sqrt{-2}$. b. 3; $-1 \pm \sqrt{-3}$. c. $-1{,}5$; $2 \pm \sqrt{-2}$. d. 4; -2; -5. e. $\frac{3}{4}$; $\pm\frac{4}{3}$. f. 7,5;

$\frac{4 \pm \sqrt{229}}{15}$. **8.** 30°; 18°; 234°. **9.** Gesetzt $y = 1 - \sin 2x$, so ergiebt sich $y = 2\cos\frac{2\alpha}{3}$, $= 2\cos\frac{2\alpha + 2\pi}{3}$, $= 2\cos\frac{2\alpha + 4\pi}{3}$, d. h. $x = 45°$ und für $\alpha = 30°$: $x = 20° 22{,}4'$; $(106° 4{,}4')$.
10. 135°. **10a.** 23° 31,7′. **11.** 122° 17,5′. **11a.** 147° 42,5′.
12. 59°53′. **12a.** 30°7′. **13.** Wie Aufg. 9. **13a.** Wie Aufg. 13, wenn man statt α einführt $\pi/_2 - \alpha$.

Cap. II.

§ 16.

1. $c = 7{,}8102$; $\alpha = 39^0 48{,}3'$. **2.** $b = 4{,}1231$; $\alpha = 62^0 44'$.
$c = 9{,}434$; $\alpha = 57^0 59{,}7'$. $b = 23{,}495$; $\alpha = 35^0 53{,}3'$.
$c = 18{,}358$; $\alpha = 60^0 38{,}5'$. $a = 45{,}635$; $\alpha = 33^0 16{,}9'$.

3. $c = 64{,}22$; $\alpha = 51^0 7{,}8'$. **4.** $b = 96{,}857$; $\alpha = 38^0 19{,}1'$.
$c = 26{,}659$; $\alpha = 45^0 27{,}4'$. $b = 68{,}292$; $\alpha = 26^0 50{,}8'$.
$c = 18{,}352$; $\alpha = 42^0 16{,}5'$. $a = 1{,}1885$; $\alpha = 43^0 19{,}8'$.

5. $b = 73$; $\alpha = 68^0 51{,}8'$. **6.** $b = 21{,}249$; $c = 22{,}372$.
$c = 73{,}593$; $\alpha = 43^0 48'$. $a = 6{,}6882$; $c = 13{,}738$.
$b = 69{,}997$; $\alpha = 0^0 30{,}2'$. $a = 12{,}981$; $c = 15{,}796$.

7. $a = 63{,}86$; $b = 23{,}369$. **8.** $c = 7{,}9834$; $b = 6{,}1855$.
$a = 16{,}729$; $b = 21{,}193$. $a = 19{,}398$; $b = 18{,}78$.
$a = 0{,}5923$; $b = 8{,}6216$. $a = 14{,}793$; $b = 10{,}255$.

9. $b = 53{,}719$; $c = 71{,}377$. **10.** $b = 415{,}38$; $c = 420$.
$a = 20{,}88$; $b = 28{,}09$. $a = 6{,}979$; $c = 8{,}757$.
$a = 98{,}484$; $c = 100$. $a = 0{,}869$; $b = 8{,}6074$.

11. $b = 65$; $c = 169$; $\alpha = 67^0 22{,}8'$.
$b = 29{,}252$; $c = 31{,}252$; $\alpha = 20^0 36{,}5'$.
$a = 0{,}10925$; $b = 0{,}2482$; $c = 0{,}27116$.
$a = 14{,}472$; $b = 13{,}512$; $c = 19{,}798$.

12. $b = 6{,}5$, $c = 9{,}7$, $\alpha = 47^0\,55{,}5'$.
$b = 11{,}6$, $c = 15{,}315$, $\alpha = 40^0\,45{,}8'$.
$b = 7{,}2'$, $c = 8{,}766$, $\alpha = 34^0\,46{,}7'$.
$a = 7{,}1575$, $c = 9{,}0807$, $\alpha = 52^0\,1'$.

13. $a = 7{,}838$, $b = 7{,}1447$, $c = 10{,}605$.
$a = 10{,}287$, $b = 19{,}442$, $c = 21{,}995$.
$a = 3{,}6473$, $b = 6{,}58$, $c = 7{,}5233$.
$a = 13{,}827$, $b = 12{,}584$, $c = 18{,}696$.

14. $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 36^0\,52{,}2'$.
$a = 24$, $b = 7$, $\alpha = 73^0\,44{,}4'$.
$a = 55{,}351$, $b = 12{,}659$, $\alpha = 77^0\,7{,}7'$.

15. $a = 5$, $b = 12$, $\alpha = 22^0\,37{,}2'$.
$a = 10{,}283$, $b = 19{,}449$, $\alpha = 27^0\,52'$.
$a = 4{,}2783$, $b = 12{,}043$, $\alpha = 19^0\,33{,}5'$.

16. $\alpha = 70^0\,31{,}7'$. **17.** $c = 288$, $\mathit{fl} = 2448$.
$\alpha = 45^0\,6{,}7'$. $c = 154{,}94$, $\mathit{fl} = 4961$.

18. $a = 9{,}3482$, $\mathit{fl} = 43{,}5$.
$a = 20{,}413$, $\mathit{fl} = 200$.

19. $c = 29{,}683$, $a = 37{,}764$.
$a = 7{,}5233$, $c = 7{,}2946$, $\mathit{fl} = 24$.

20. $a = 6{,}3899$, $c = 12{,}042$.
$a = 0{,}44721$, $c = 0{,}63244$.

21. $\alpha = 55^0\,35{,}7'$, $a = 0{,}90286$.
$\gamma_1 = 46^0\,53{,}4$, $c_1 = 0{,}8119$; $\gamma_2 = 133^0\,6{,}6'$, $c_2 = 1{,}8723$.

22. $\alpha = 20^0\,36{,}6'$, $\mathit{fl} = 25{,}74$. **23.** $\sin 2\alpha = \frac{h}{m}$, $\alpha = 37^0\,52{,}5'$.

24. $m^2 \cdot \sin\delta = 6{,}8944$. **25.** $\frac{1}{2} m_1^2 \cdot \sin 2\varepsilon = m_1^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon = 1500$.

25a. $\frac{ad \sin\delta}{2}$. **26.** $\operatorname{tg}\varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon_2 = 4$. **27.** $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = 3{,}57$.

28. $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$, $\alpha = 67^0\,24'$. **29.** $41^0\,13{,}2'$, $82{,}368$.

30. $\frac{h \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = 24$, $\mathit{fl} = 207$. **31.** $r = 1{,}618$, $\varrho = 1{,}5388$, $\mathit{fl} = 7{,}694$. **32.** $r = 1{,}0824$, $\mathit{fl} = 3{,}3137$. **33.** $\varrho = 0{,}9848$, $2c = 0{,}34729$. **34.** $3{,}1416 = \pi$, $3{,}14155$. **35.** $68{,}393$,

70,805, 372,23, 380,96, 398,95. **36.** 995,82, 1002,1. **37.** 583,03, 599,4, 633,3. **38.** 6,5233, 8,0364, 9,054, 9,7156, 10,049. **39.** 19,458, 21,131. **40.** 27,184, 27,1225. **41.** 12,483, 12,555, 12,118, 12,258, 12,541. **42.** 69,928, 69,785. **43.** 503,96, 501,3. **44.** 102,81, 108,61, 36,444, 36,944. **45.** 328,54, 344,05. **46.** 92,072, 88,302. **47.** 30,677, 30,539, 30,747. **48.** 11,635. **49.** 9,7706. **50.** 3,9021. **51.** 18,044. **52.** 99,641. **53.** 1,0235. **54.** 8,0423. **55.** 30,001. **56.** 1,297. **57.** 9,9852. **58.** Um 0,31. **59.** Um 0,2239. **60.** $r^2 \sin \gamma^2 \cdot \pi = 0{,}635$. **61.** 0,004083. **62.** 94,63. **63.** 0,82843. **64.** 0,76953. **65.** 16,329 $\left(7\sqrt{\pi\sqrt{3}}\right)$. **66.** $\frac{27}{8} \cdot \frac{d^2 \cdot \sin 2\gamma}{\cos \gamma/_2{}^4} = 0{,}78365\, d^2$. **67.** 10000.

§ 17.

1. a. 0,76537, **b.** 2,7645, **c.** 11,003. **2. a.** 97° 10,8′. **b.** 96° 38,2′. **3. a.** 2,7261. **b.** 11,804. **4.** 5,1399. **5. a.** 6,4346. **b.** 5,9109. **6.** 7,4698. **7.** 4,8379. **8.** 95° 29,5′, 4,441. **9.** 2,5004. **10.** 7,1683. **11.** 190,3. **12. a.** 4,677. **b.** 5,182. **c.** 6,1282. **13.** 0,196. **14.** 47,403; 142,6. **15.** 18,87 und 94,23. **16.** 4,27. **17.** 10,27. **18.** 18,928. **19.** 1,1078. **20.** 21,66. **21. a.** $L_a = 2{,}5124$, $L_b = 3{,}4876$. **b.** 699,5; 720,5. **22.** 2,0905. **23.** Erster Fall: der Mittelpunkt M des Kreises liegt zwischen den Sehnen a und b: so sind die Bogen über a: $b_a = 4{,}3784$, über b: $b_b = 5{,}9107$ und die Zwischenbogen $= 4{,}298$; der Inhalt der Zwischenfigur $= 21{,}4588$. Zweiter Fall: die Sehnen a und b liegen auf derselben Seite des Mittelpunktes M: so sind die Zwischenbogen $= 0{,}76615$ und der Inhalt der Zwischenfigur $= 2{,}6248$. **24.** r^2; 1,683 r. **25.** 19° 10,9′, (112° 53,1′). **26.** 11,516, 87° 59,4′, 11,343 (8,2858). **27.** 6,4945, 4,9301. **28.** 0,7 km. **29.** 210,36 km. **30.** 0,1 km. **31.** 63° 57,2′, 53° 57,5′, 45° 57,1′. **32.** 88,31 km. **33.** 2727 km. **34.** 77° 19,2′. **35.** 12,58, 62,901. **36.** 3,1243, 6,2641, 19,571. **37.** 0,81163, 1,2321. **38.** 60° 33,6′, $\alpha_0 = 14°\, 28{,}6′$. **39.** 2,9583, 46° 42′. **40.** $a^2 \cdot \sin \alpha = 23{,}038$,

für $\alpha = 90^0$. **41.** $b^2 = \frac{a^2}{\sin\alpha}$, $b = 2{,}6361$; $d_1 = 2{,}0606$, $d_2 = 4{,}8529$. **42.** Die Seiten sind: $a \sin \alpha/_2 \pm \sqrt{a^2 \sin {\alpha/_2}^2 - R \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2}$, $R_0 = \frac{a^2}{2} \sin\alpha$. **43.** $\frac{ab}{4 \sin \alpha^2}$; $\alpha_0 = 90^0$. **44.** $\frac{a^2}{1 + \sin 2\alpha}$; $\alpha_0 = 45^0$. **45.** $(a \sin \alpha)^2$, $\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{ctg}(\alpha - 45^0)$.

46. $\left(\frac{a}{2 \sin 15^0}\right)^2 \cdot \sqrt{3}$. **47.** $\frac{a^2 \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \beta/_2}$.

48. $\frac{c^2}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2}$, $\frac{c}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2}$. **49.** $d^2 \cdot \frac{\sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$.

50. $\frac{a - b}{2 \cos \alpha}$, $\frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. **51.** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 fl}{a^2 - b^2}$; $\alpha = 71^0\, 33{,}9'$, $c = \frac{2 fl}{(a + b) \sin \alpha} = 3{,}1623$. **52.** $\frac{1}{2} (d_1 + d_2)^2 \cdot \sin \gamma$, $a = 2 d_1 \cdot \sin \gamma/_2$, $b = 2 d_2 \cdot \sin \gamma/_2$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \operatorname{ctg} \gamma/_2$.

53. $\frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha$. **54.** $b = \frac{a}{1 + 2 \cos \alpha} = \frac{a \sin \alpha/_2}{\sin 3\alpha/_2}$, am grössten für $\alpha = 90^0$, $fl = 2 b^2 \sin \alpha \cdot \cos {\alpha/_2}^2 = \frac{a^2 \sin \alpha^3}{2 \sin {3\alpha/_2}^2}$. **55.** s. 54.

56. Die nicht parallelen Seiten $2c \cos \alpha$, die parallele $-2c \cos 2\alpha$, die Diagonalen $2c \sin \alpha$; $fl = 2c^2 \sin \alpha^2 \cdot \sin 2\alpha$. **57.** **a.** 31,566 m, **b.** 88,001 m. **58.** **a.** 58,14 m, **b.** 46,613 m. **59.** **a.** 38,638 m, **b.** 40,914 m. **60.** **a.** 404,86 m, bez. 406,14 m. **b.** 257,4 m, bez. 259,4 m. **61.** 310,85 m. **62.** $62^0\, 14{,}7'$. **63.** 39,245 m. **64.** $11^0\, 25{,}3'$, 1010 m. **65.** $h = 9{,}8217$ m, $r = 2651{,}2$ m. **66.** $a = 2290{,}4$ m, $r = 13139$ m. **67.** Wird der Elevationswinkel des Punktes B durch β bezeichnet, der des Punktes C durch γ und der Winkel, welchen BC mit der Horizontalen bildet, durch δ, so ist $\alpha = \beta + \gamma + \delta$; es wird $\alpha = 13^0\, 45{,}1'$. **68.** 610,84 m. **69.** $1^0\, 8{,}6'$. **70.** Das 76,39 fache.

71. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{ah}{a^2 - hh_1 + h_1^2}$, möglichst gross für $h_1 = h/_2$; $\alpha = 54{,}6'$.

72. 0,09696 cm. **73.** 7,5802 km. **74.** 1424200 km.

75. 8,582 Secunden. **76.** 53,3 Minuten. **77.** 31 Minuten. **78.** 2,1867 m. **79.** $r = 1062{,}05$ m, $b = 820{,}22$ m. **80.** $132^0\,50{,}6'$, 823,04 m. **81** und **82.** 606,9 m. (Die Länge der Bahn ist unabhängig von dem Verhältniss von BE zu EC.)

§ 18.

1. $b = 13{,}819$, $c = 13{,}348$. **2.** $a = 1341{,}3$, $b = 1114{,}4$. **3.** $a = 53{,}276$, $c = 47{,}324$. **4.** $b = 21{,}602$, $c = 29{,}335$. **5.** $a = 58{,}779$, $c = 56{,}011$. **6.** $b = 27{,}542$, $c = 47{,}479$. **7.** $\mathfrak{F} = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$, **a.** 84; **b.** 30,01; **c.** 406,85.

8. $a = \frac{h_a \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma \cdot \sin\beta} = 119{,}19$. **9.** 4,15, 8,67, 31,745.

10. $\frac{(a-b)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{(a-b)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$; **a.** 8, 5,4722, 56,565; **b.** 10,765, 11,556, 89,504. **11.** $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d^2}{2}\cdot\sin 2\alpha$. **12.** 10,101.

13. $\frac{d\cdot\sin 80^0}{\sin 60^0}$, $\frac{d^2\cdot\sin 80^{0\,2}}{2\sin 60^0}$. **14.** $\frac{d_1}{2\cos\gamma}$ oder $\frac{d_2\sin\gamma}{\sin 3\gamma}$, wo $\gamma = \frac{180^0}{n}$, $\mathfrak{F} = \frac{nc^2}{4}\operatorname{ctg}\gamma$. **15.** $\gamma = 29^0\,24'$, $b = 15{,}415$. **16.** $\alpha = 17^0\,3{,}3'$, $c = 66{,}553$. **17.** $\gamma = 67^0\,52{,}8'$, $a = 3{,}5776$. **18.** $\beta = 43^0\,55{,}3'$, $c = 33{,}682$. **19.** $\beta_1 = 51^0\,18{,}5'$, $c_1 = 43{,}098$; $\beta_2 = 128^0\,41{,}5'$, $c_2 = 15{,}593$. **20.** $\beta_1 = 16^0\,43{,}2'$, $a_1 = 35{,}52$; $\beta_2 = 163^0\,16{,}8'$, $a_2 = 1{,}0412$.

21. Es muss sein $b\sin\alpha \leqq a$: wenn also $a > b$, so ist immer eine und zwar nur eine einzige Lösung möglich, weil $\beta < \alpha$, also spitz sein muss, ist $a < b$, so kann entweder $b\sin\alpha < a$ sein, für welche Annahme Winkel β spitz und stumpf sein kann, also zwei Dreiecke statthaft sind, oder es ist $b\sin\alpha = a$, für welchen Fall $\beta = 90^0$ ist, das Dreieck also rechtwinklig, oder endlich $b\sin\alpha > a$, wo kein Dreieck möglich ist. (Geometrische Deutung der verschiedenen Fälle). **21a.** Um 420. **22.** 5,8892. **23.** $\alpha = 1^0\,41{,}3'$, $b = 101{,}47$, $c = 101{,}69$. **24.** $m_c > m_b \cdot \sin\beta_1$, $a = 3{,}8943$. **25.** $b_1 = 20{,}522$ (oder 1,847), $\measuredangle(a,b) = 24^0 57{,}9'$ (oder $155^0\,2{,}1'$), $\mathfrak{F} = 89{,}215$

(oder 8,0295). **26.** 2,3767, 1,2624. **27.** 1,2383, 2,4227 (Produkt = 3). **28.** $\sin\alpha = \frac{c \sin\delta}{r}$, $fl = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}$, ein Maximum für $\sin\delta = \frac{1}{2}\frac{r}{c}\sqrt{2}$.

29. $\alpha = 48^0\, 11{,}4'$, $\beta = 58^0\, 24{,}7$.
$\alpha = 36^0\, 52{,}2'$, $\gamma = 90^0$.
$\alpha = 24^0\, 37{,}2'$, $\gamma = 113^0\, 34{,}7'$.

30. $\alpha = 108^0\, 12{,}6'$, $\gamma = 22^0\, 20'$,
$\alpha = 117^0\, 16{,}8'$, $\gamma = 26^0\, 23'$,
$\alpha = 52^0\, 36{,}8'$, $\beta = 59^0\, 24{,}6'$.

31. $\alpha = 68^0\, 28'$, $\beta = 51^0\, 35{,}8'$,
$\alpha = 44^0\, 40{,}8'$, $\beta = 57^0\, 13{,}6'$.
$\alpha = 47^0\, 42{,}6'$, $\beta = 102^0\, 9{,}6'$.

32. $\alpha = 47^0\, 52{,}2'$, $\beta = 58^0\, 54{,}6'$,
$\alpha = 51^0\, 53{,}2'$, $\beta = 59^0\, 31{,}3'$.

33. $\alpha = 44^0\, 24{,}3'$, $\beta = 57^0\, 6{,}8'$,
$\alpha = 62^0\, 57'$, $\beta = 45^0\, 11{,}6'$,
$\alpha = 34^0\, 56{,}7'$, $\beta = 45^0 57{,}8'$.

34. $\alpha = 46^0\, 34'$, $\beta = 57^0\, 54{,}6'$.
Umfang = 15,984.

35. Er wächst um $5^0\, 22{,}8'$ oder nimmt ab um $4^0\, 22{,}8'$.

36. $9^0\, 50{,}5'$, $19^0\, 7'$. **37.** $\cos\alpha = \frac{h_a^2 \cdot h_c^2 + h_b^2\, h_a^2 - h_c^2\, h_b^2}{2\, h_a^2\, h_b\, h_c}$, $\alpha = 94^0\, 56{,}4'$. **37a.** $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2}$ oder $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

38. $\cos\gamma = \frac{\lambda_1^2 \mu_1^2 + \lambda_2^2 \mu_2^2 - \lambda_1^2 \mu_2^2}{2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2}$. **39.** $\cos(a, b) = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}$, $fl = ab \sin(a,b)$. **40.** $41^0\, 24{,}6'$, $55^0\, 46{,}3'$, $fl = 42{,}993$.

41. $A = 127^0\, 33{,}1'$, $B = 59^0\, 24{,}6'$, $C = 128^0\, 33{,}7'$.

42. Das Dreieck ist rechtwinklig (vergl. § 2 Aufg. 34); der kleinste Winkel desselben gleich $31^0 43'$. **43.** $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$ u. s. w., $fl = \frac{4}{3}\sqrt{s(s - m_a)(s - m_b)(s - m_c)}$, wo $s = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2fl}{bc}$ u. s. w.

44. $\alpha = 77^0\, 12{,}8'$, $c = 14{,}986$,
$\alpha = 88^0\, 41{,}5'$, $b = 424{,}68$.

45. $\alpha = 11^0\, 52{,}1'$, $c = 33{,}726$; $\gamma = 76^0\, 29{,}7'$, $a = 3{,}8998$.

46. $a = 1{,}313$, $\beta = 93^0\, 28{,}6'$; $c = 45{,}66$, $\alpha = 44^0\, 28{,}2'$.

47. $b = 1{,}5664$, $\alpha = 30^0\, 6{,}5'$; $b = 3{,}9481$, $fl = 2{,}2101$.

48. $c = 249{,}3$, $\alpha = 46^0\, 12{,}4'$; $c = 545{,}67$, $\alpha = 78^0\, 20{,}2'$.

49. 5,1669, 6,0596. **50.** $fl = \frac{h_b \cdot h_c}{2 \sin\alpha} = 1{,}0267$, $a^2 \cdot \sin\alpha^2 = (h_b^2 + h_c^2 - 2h_b h_c \cos\alpha)$, $a = 2{,}0773$.

51. Bezeichnet man die Fusspunkte der Höhen auf die Seiten a, b, c bezüglich durch A_1, B_1, C_1, so ergiebt sich $B_1C_1 = a\cos\alpha$ u. s. w.

52. $a^2 = l_b^2 + l_c^2 + 2 l_b \cdot l_c \cdot \sin \alpha/_2$, $\varrho = \frac{l_b\, l_c \cos \alpha/_2}{a}$.
53. $d^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab \cos\gamma$, $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2)$, $d_1 = 37$, $d_2 = 20{,}809$, $fl = 312$. **54.** $2fl = d_1\, d_2 \sin\delta$, $a = 5{,}0031$, $b = 2{,}3385$, $fl = 11{,}37$. **55.** Ist a die grössere der parallelen Seiten gegeben und c die nicht parallele, so hat man $b = a - 2c\cos\alpha$, $fl = ac \cdot \sin\alpha - c^2/_2 \sin 2\alpha$. **56.** $d = 4{,}9579$, $fl = 39{,}997$, $(d, a) = 53^0\, 46{,}3'$. **57.** Gesetzt $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, so ist
$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $f = \frac{a^2 \sin\gamma_2 + b\, e \sin\gamma_1}{e \sin\gamma}$,
$fl = \frac{(a \sin\gamma_1 + b \sin\gamma_2)(a \sin\gamma_2 + b\sin\gamma_1)}{2\sin\gamma}$. **58.** Die fehlenden Seiten c und d sind bestimmt durch $c \sin\gamma = b - a\cos\gamma$ und $d\sin\gamma = a - b\cos\gamma$ und der Inhalt durch
$fl \cdot \sin\gamma = ab - \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\cos\gamma$, $fl = 6{,}0407$, $c = 4$, $d = 0{,}016261$.
59. Sind x und y die Theile des Winkels α, so ergiebt sich $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{\lambda\cos\alpha - \mu}{\lambda\cos\alpha + \mu} \cdot \operatorname{tg}\alpha/_2$, $x = 27^0\, 30{,}9'$. **60.** 19,458, 3,8645, 19,838, $fl = 37{,}6$. **61.** Wie 1 : 0,9257 : 1. **62.** Wie 17:22. **63.** 40,684. **64.** 40,464. **65.** $4 m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$.
66. $(\lambda + \mu)^2 \cdot AA_1^2 = \lambda^2 c^2 + \mu^2 b^2 + 2\lambda\mu\, b\, c\cos\alpha$.
67. $\frac{e f \cdot \sin\theta}{2}$. **68.** $CA_1 = 44$, $BA_1 = 42$. **69.** $96^0\, 57{,}3'$, Segment$=23{,}16$. **70.** a. 10,27. b. 5,0795. **71.** $\Delta ABC = 1{,}2859$, $\Delta A_1 B_1 C_1 = 5{,}3044$. **72.** 5,6935, 11,859, $fl = 115{,}16$.
73. 11^0. **74.** $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{a\sin\beta}{b - a\cos\beta}$, $\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{b\sin\gamma - a\sin(\beta+\gamma)}{b\cos\gamma - a\cos(\beta+\gamma)}$.
75. $f^2 = a^2 + c^2 + e^2 - 2ae\cos\alpha_1 - 2ce\cos\gamma_1 + 2ac\cos(\gamma_1 - \alpha_1)$.
76. $c^2 = a^2 + e^2 + f^2 - 2ae\cos\alpha_1 - 2af\cos\beta_1 + 2ef\cos(\alpha_1 + \beta_1)$.

§ 19.

1. a. 1,7976, 1,9504, 2,4066. b. 29,113, 13,856, 19,7525. **2.** $a = 6{,}5904$, $b = 10{,}607$, $c = 8{,}6499$, $fl = 28{,}467$. **3.** a. 23,475, 21,751, 14,443. b. 12,79, 11,571, 11,906. **4.** a. 21,004, 18,53, 15,201. b. 18,187, 15,429, 20,532. **5.** 4,9822, 8,3844.

6. $fl = \frac{h_b \cdot h_c}{2 \sin \delta} = 49{,}497$. **7. a.** $\beta = 73^0\ 54{,}6'$, $\gamma = 64^0\ 36{,}2'$. **b.** $\beta = 59^0\ 51{,}2'$, $\gamma = 52^0\ 39{,}4'$. **8.** $a = 40{,}8$, $fl = 81{,}6$, $\alpha = 96^0\ 57{,}3'$, $\beta = 77^0\ 19{,}2'$. **9.** Die halbirten Winkel sind $64^0\ 10{,}8'$ und $41^0\ 29{,}1'$ und deren Gegenseiten bezüglich 6,7312 und 4,9534, die dritte Seite 7,2, $fl = 16{,}052$. **10.** Entweder $\beta = 53^0\ 7{,}8'$, $\gamma = 73^0\ 44{,}4'$, $b = 25$, $c = 30$, $fl = 300$, oder $\beta = 53^0\ 7{,}8'$, $\gamma = 106^0\ 15{,}6'$, $b = 56{,}8175$, $c = 68{,}18$, $fl = 681{,}8$. **11.** $a = 14{,}286$, $b = 5$, $c = 16{,}7145$, $fl = 33{,}429$, $\alpha = 53^0 7{,}8'$. **12.** $b = 16{,}174$, $c = 3{,}8995$, $\beta = 65^0\ 26{,}6'$, $\alpha = 111^0\ 58'$, $fl = 29{,}245$. **13.** 295,86, 7,4147. **14.** 10,065. **15.** $\gamma = 61^0$, $a = 13{,}381$, $b = 7{,}2032$, $c = 11{,}725$. **16.** Entweder $\gamma = 64^0\ 9{,}5'$, $\beta = 10^0\ 10{,}7'$, $a = 54{,}487$, $c = 50{,}93$, oder $\gamma = 115^0\ 50{,}5'$, $\beta = 61^0\ 51{,}7'$, $a = 0{,}45444$, $c = 10{,}206$.
17. $\frac{c \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma \cdot \sin (\alpha - \beta)} = 4{,}1652\ c$. **18.** 23,858.

19. $a = 13{,}704$, $(a, c) = 52^0\ 54{,}1'$, $fl = 62{,}864$. **20.** Entweder $(a, c) = 11^0\ 11{,}3'$, $d = 2{,}1379$, $fl = 5{,}53$, oder $(a, c) = 137^0\ 12{,}7'$, $d = 7{,}4845$, $fl = 19{,}36$. **21.** $(a, c) = 34^0\ 12{,}3'$, $(a, d) = 126^0\ 52{,}2'$, $a = 2{,}75$, $b = 1{,}25$, $fl = 8{,}32$. **22.** Die parallelen Seiten 31 und 17, die nicht parallelen 13 und 15, $fl = 288$. **23.** 5,2. **24. a.** $86^0\ 59'$, $64^0\ 37{,}3'$, $fl = 18{,}974$. **b.** $89^0\ 34'$, $80^0\ 2{,}5'$, $fl = 131$. **25.** 3,7807, 7,1414 $(\sqrt{51})$, $55^0\ 56{,}1'$, $75^0\ 7{,}5'$, $fl = 19{,}488$. **26.** $\frac{a \sin \varepsilon + c \sin \delta}{a \sin \delta + c \sin \varepsilon}$ und wenn man $\frac{a}{c} = \operatorname{tg} \varphi$ und $\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \operatorname{tg} \psi$ einführt: $\frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos (\varphi - \psi)}$. **27.** $b = 11$, $c = 29$, $2\,fl = \pm \frac{a^2 \sin \alpha \sin \delta - c^2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \delta)}$, $fl = 240$. **28.** $d = 44$, $(b, c) = 156^0\ 24'$, $fl = 444$. **29.** $(b, c) = 117^0\ 20{,}6'$, $d = 17$, $fl = 420$. **30.** Ist $ABCDE$ das Fünfeck, $AB = a$, $BC = b$ u. s. w., und schneiden sich AB und DE verlängert in H, so ergiebt sich

$$BH = \frac{c \sin \gamma - b \sin (\beta + \gamma)}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)} = 25{,}568, \quad DH = 28{,}371,$$

$AE = e = 7{,}03$, $fl = 11{,}281$. **31.** **a.** 5,9377, $56^0 26{,}6'$, $41^0 48{,}6'$, $fl = 9{,}8962$. **b.** 10, $54^0\,19'$, $45^0\,35{,}1'$. **32.** **a.** $b = 19{,}318$, $c = 16{,}66$, $\alpha = 48^0\,35{,}4'$, $fl = 120{,}69$. **b.** $b = 16$, $c = 35{,}776$, $\alpha = 70^0$, $fl = 268{,}95$. **33.** 4,3819. **34.** $\operatorname{tg} \beta/_2 = \dfrac{\varrho}{c - \varrho \operatorname{tg} \alpha/_2}$, gesetzt $\dfrac{\varrho}{c} = \operatorname{tg} \varphi$, so wird $\operatorname{tg} \beta/_2 = \dfrac{\sin\varphi \cdot \cos \alpha/_2}{\cos(\varphi + \alpha/_2)}$, $\beta = 52^0\,23{,}7'$.
35. $2\varrho = (b + c - a) \operatorname{tg} \alpha/_2$, $\varrho = 5\tfrac{1}{3}$. **36.** 26,406. **37.** 3,5905. **38.** 1,3021. **39.** 3,6056 oder 4,0414. **40.** 9,5789. **41.** $fl = 46{,}476$, 81,057, 34,62. **42.** $r = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}$, $b = \dfrac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ u. s. w., $fl = \dfrac{(ab + cd) \sin(\alpha + \beta)}{2} = \dfrac{a^2}{2 \sin \alpha^2} \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\alpha + \delta)$.
43. $26{,}833 - 24{,}434 = 2{,}399$. **44.** $9{,}8477 - 5{,}6301 = 4{,}2176$. **45.** $c = 33{,}548$, $a = 32{,}82$. **46.** 0,29341. **47.** $s_{10} = 1{,}1233$, $s_\infty = 1{,}22406$. **48.** $\dfrac{r \sin \gamma}{2 \sin \dfrac{\pi - \gamma}{2}}$. **49.** $h = \dfrac{d \cdot \sin(\gamma + \delta)}{\cos \gamma} = 77{,}156$m.
50. $h = \dfrac{d \cdot \sin(\gamma - \delta)}{\cos \gamma} = 74{,}277$m. **51.** $h = \dfrac{d \sin \gamma \cdot \sin \delta}{\sin(\delta - \gamma)}$. **a.** 69,053m. **b.** 57,49m. **52.** $h = \dfrac{d \cdot \sin(\delta - \varepsilon) \cdot \sin \gamma}{\sin(\delta - \gamma)} = 60{,}783$m.
53. $h = \dfrac{d \cdot \sin(\delta - \varepsilon)}{\sin \delta \cdot \cos \varepsilon} = 46{,}942$m. **54.** 1005,4m. **55.** 203,99.
56. $h = \dfrac{d \cdot \sin \delta \cdot \sin(\gamma - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cdot \sin(\delta - \gamma)}$. **57.** 150m.
58. $\dfrac{d \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\delta_1 - \delta_2)}{\sin(\gamma + \delta_1) \cdot \sin(\gamma + \delta_2)} = 79{,}768$m. **59.** 11,965m.
60. 309,4m. **61.** **a.** 799,22m. **b.** 50,528m. **62.** 315,2m. **63.** **a.** 120,42m $(\sqrt{14500})$. **b.** 48,204m. **64.** 112,2m. **65.** 67,75m. **66.** $AB = 12$, $BC = 102{,}62$, $CA = 96{,}64$. **67.** $BC = 3{,}0469$, $CA = 4{,}1051$, $AB = 4{,}6681$. **68.** $a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$, $\cos \alpha_1 = \dfrac{a_1}{a}$, $\cos \alpha_2 = \dfrac{a_2}{a}$. **69.** $\cos \alpha = \dfrac{b_1 c_1 + b_2 c_2}{\sqrt{b_1{}^2 + c_1{}^2} \cdot \sqrt{b_2{}^2 + c_2{}^2}}$, $a^2 = (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2$, $2\,fl = \pm\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$.

70. Sind die Projektionen der Seiten AC und AB bezüglich b und c, so ist die Seite a des Dreiecks bestimmt durch die Gleichung $3a^2 = 4(b^2 - bc + c^2)$, und der Winkel β der Seite AC mit L: $\cos\beta = \frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2 - bc + c^2}}$. **71.** Es ist $a^2 = b^2 + c^2$ und $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. **72.** Liegen die Projektionen von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte aus nach derselben Seite hin, so hat man $c = 22{,}403$, $(c, L) = 82^0\ 18{,}3'$; liegen die Projektionen nach entgegengesetzten Seiten hin, so ist $c = 27{,}072$, $(c, L) = 4^0\ 11'$.

73. **a.** $c^2 \cdot \cos \gamma/_2{}^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \cos\gamma$.
b. $c^2 \cdot \sin \gamma/_2{}^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \cos\gamma$.

74. Die Projektion einer der Seiten auf L ist gleich der Summe (oder Differenz) der Projektionen der anderen beiden Seiten, also etwa $a \cdot \cos(a, L) = b \cdot \cos(b, L) + c \cdot \cos(c, L)$.

75. Sind die Projektionen der Ecken A, B, C, . . . einer geradlinigen Figur auf eine beliebige gerade Linie L durch A_1, B_1, C_1, . . . dargestellt, so ist jedesmal

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots + K_1A_1 = 0,$$

wenn man feststellt, dass durch die Reihenfolge der Buchstaben bei diesen Projektionen zugleich die Richtung der Projektionen selbst angedeutet werden soll, so dass $A_1B_1 = -B_1A_1$, oder $A_1B_1 + B_1A_1 = 0$ ist. Dies vorausgesetzt, wird das Resultat: $AB \cdot \cos(AB, L) + BC \cdot \cos(BC, L) + \ldots + KA \cdot \cos(KA, L) = 0$.

76. **a.** $\Sigma l = \frac{c^{*)}}{\sin\alpha} = 18{,}781$. **b.** $\Sigma m = c \cdot \operatorname{ctg} \alpha^{*)} = 18{,}103$.
c. $\Sigma AC = \frac{c^{*)}}{\sin\alpha^2} = 70{,}544$. **d.** $\Sigma AB = \frac{c \operatorname{ctg}\alpha^{*)}}{\sin\alpha} = 67{,}544$.

77. Bezeichnet sei $\frac{\pi}{n}$ d. i. $\frac{180^0}{n} = \gamma$, so ist $AB_1 = l_1 = r \sin 2\gamma$, $B_1C_1 = l_2 = r\cos 2\gamma \cdot \sin 2\gamma$, $C_1D_1 = l_3 = r\cos 2\gamma^2 \cdot \sin 2\gamma, \ldots$ $\sum_1^\infty l_k = r \operatorname{ctg}\gamma$ und $MA = r$, $MB_1 = r\cos 2\gamma$, $MC_1 = r\cos 2\gamma^2, \ldots$ Summe $= \frac{r}{2\sin\gamma^2}$. **78.** $AB_1 = a\sin\gamma$, $B_1C_1 = a\sin 3\gamma, \ldots$

*) Betreffs der Construktion s. § 22, Aufg. 1 — 3.

Summe $= \frac{a}{\sin\gamma}$, $BB_1 = a\cos\gamma = \frac{a}{2\sin\gamma}\cdot\sin 2\gamma$,

$$CC_1 = \frac{a}{2\sin\gamma}\sin 4\gamma,\quad DD_1 = \frac{a}{2\sin\gamma}\cdot\sin 6\gamma,\ \ldots$$

Summe $= \frac{a}{2\sin\gamma}[\sin 2\gamma + \sin 4\gamma + \sin 6\gamma + \ldots + \sin 2(n-1)\gamma] = 0$.

79. $BC_1 = a\cos 2\gamma$, $C_1D_1 = a\cos 4\gamma$, $D_1E_1 = a\cos 6\gamma$ ... und die Summe $= a(\cos 2\gamma + \cos 4\gamma + \cos 6\gamma + \ldots \cos 2n\gamma) = 0$. (Vergl. § 7, Aufg. 8 und Aufg. 75). **80.** Die Projektionen sind $2r\cos\gamma^2$, $2r\cos 2\gamma^2$, $2r\cos 3\gamma^2$, ... $2r\cdot\cos(m-1)\gamma^2$ und ihre Summe $= r\left(\frac{\sin(n-1)\gamma}{\sin\gamma} + n - 3\right)$. (§ 7, Aufg. 22).

§ 20.

1. $c = \frac{(a+b)\sin 45^0}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$. **a.** $c = 13{,}592$, $a = 10{,}955$. **b.** $c = 7{,}127$.

2. $c = \frac{(a-b)\sin 45^0}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. **a.** $c = 13{,}99$, $a = 12{,}752$. **b.** $c = 9{,}8247$, $a = 8{,}653$, **c.** $c = 373{,}79$.

3. $b = (c+a)\ \mathrm{tg}\ \beta/_2 = 0{,}12707$, $c = \frac{c+a}{2\cos\beta/_2{}^2} = 0{,}50807$.

4. $b = (c-a)\ \mathrm{ctg}\ \beta/_2 = 1{,}2788$, $c = \frac{c-a}{2\sin\beta/_2{}^2} = 1{,}3176$.

5. $c = \frac{s\cdot\sin 45^0}{\cos\alpha/_2\cdot\cos\beta/_2}$. **a.** $c = 7{,}0837$, $a = 4{,}2449$. **b.** $c = 8{,}704$.

6. $c = \frac{(s-c)\sin 45^0}{\sin\alpha/_2\cdot\sin\beta/_2} = 5{,}2348$. **7.** $c = \frac{(s-a)\sin 45^0}{\sin\beta/_2\cdot\cos\alpha/_2} = 2{,}051$.

8. $c^2 = \frac{a^2-b^2}{\sin(\alpha-\beta)}$, $c = 2{,}3236$. **9.** $c = \frac{d}{2\cos(\alpha-45^0)^2}$.

10. $b = \frac{d\cdot\mathrm{tg}\ \alpha/_2}{\cos\alpha}$. **11.** $b = \frac{d\cdot\mathrm{ctg}\ \alpha}{2\sin\alpha/_2{}^2}$. **12.** $a = t_a\cdot\mathrm{tg}\ \alpha\cdot\cos\alpha/_2$.

13. $a = \frac{t_c\cdot\cos(\alpha-45^0)}{\cos\alpha}$, $c = \frac{2t_c\cdot\sin(\alpha-45^0)}{\sin 2\alpha}$.

14. $c^2 = \frac{d^2}{\sin 2\alpha\cdot\sin(\alpha-45^0)^2}$. **15.** $c^2 = \frac{d^2}{2\sin(\alpha-45^0)^2}$.

16. a. $c = \dfrac{(a+b)\sin\gamma/_2}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = 0{,}74295$, $a = \dfrac{(a+b)\sin\alpha}{2\cos\gamma/_2\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = 0{,}60234$.

b. $a = 5{,}3901$, $c = 9{,}403$.

17. a. $c = \dfrac{(a-b)\cos\gamma/_2}{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$, $a = 4{,}9565$. **b.** $a = 37{,}661$, $c = 16{,}96$.

18. a. $a = 6{,}3859$, $b = 3{,}7853$. **b.** $a = 13{,}138$, $c = 8{,}059$.

c. $fl = s^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha/_2 \quad \operatorname{tg}\beta/_2 \cdot \operatorname{tg}\gamma/_2 = 22{,}088$.

19. $c = \dfrac{(s-c)\sin\gamma/_2}{\sin\alpha/_2\cdot\sin\beta/_2}$. **a.** $a = 0{,}59101$, $c = 0{,}80211$.
b. $fl = (s-c)^2\operatorname{ctg}\alpha/_2\cdot\operatorname{ctg}\beta/_2\cdot\operatorname{tg}\gamma/_2 = 6{,}6848$.

20.*) $a = 1{,}6561$, $b = 4{,}2287$. **21.** $a = 2$, $c = 5$.

22. $a = 457$, $b = 385$. **23. a.** $a = 17{,}706$.

b. $\varrho^2 = fl\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2\cdot\operatorname{tg}\beta/_2\cdot\operatorname{tg}\gamma/_2$, $\varrho = 1{,}4585$.

24. $a = 5{,}6841$, $b = 6{,}1075$, $c = 5{,}3715$.

25. $c = \dfrac{h_a + h_b}{2\cos\gamma/_2\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = 2{,}5981$. **25a.** $a = \dfrac{d}{2\sin\alpha/_2\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = 17{,}08$.

26. $a = 0{,}76169$, $b = 1{,}3139$, $c = 1{,}9953 = \dfrac{\sin\gamma\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$.

27. $c^2 = \dfrac{(a^2-b^2)\sin\gamma}{\sin(\alpha-\beta)}$. **28.** $2fl = d^2\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $fl = 2{,}1238$, $a = 1{,}8457$.

29. $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\beta-\gamma)}$. **30.** $\dfrac{d}{2\sin\alpha/_2\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$. **31.** $\dfrac{d\cdot\sin\alpha/_2}{\cos\alpha\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$.

---

*) Sind von einem Dreieck, ausser einer beliebigen Linien- oder Flächenbestimmung, die Winkel gegeben, so kann man zu seiner Auflösung ein ihm ähnliches Dreieck zu Grunde legen, in welchem irgend ein Stück, z. B. eine Seite, von gegebener Grösse ist. In diesem Dreieck berechnet man sich die der gegebenen entsprechende Linien- oder Flächenverbindung und erhält dann die einzelnen Stücke des fraglichen Dreiecks selbst durch Proportionen. Geht man z. B. in Aufg. 20 von einem Dreieck $A_1B_1C_1$ aus, welches ausser den Winkeln $\beta_1 = 76°$ und $\gamma_1 = 81°\,40'$ die Seite $a_1 = 1$ enthält, so ergiebt sich $c_1 - 2a_1 = 0{,}60383$, und demnach

$$a : a_1 = c - 2a : c_1 - 2a_1 = 1 : 0{,}60383 = 1{,}6561 \text{ u. s. w.}$$

§ 21.

1. **a.** $h_a = \frac{a \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$, $h_b = a \sin\gamma$. **b.** $r = \frac{a}{2 \sin\alpha}$.

c. $\varrho = \frac{a \sin {}^{\beta}/_{2} \cdot \sin {}^{\gamma}/_{2}}{\cos {}^{\alpha}/_{2}}$, $\varrho_a = \frac{a \cdot \cos {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}}{\cos {}^{\alpha}/_{2}}$, $\varrho_b = \frac{a \cdot \sin {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}}{\sin {}^{\alpha}/_{2}}$.

d. $k_a{}^1 = a \operatorname{ctg} \alpha$. **e.** $k_a = \frac{a \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha}$. **f.** $fl = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$.

g. $s = \frac{a \cos {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}}{\sin {}^{\alpha}/_{2}}$. **h.** $s - a = \frac{a \sin {}^{\beta}/_{2} \sin {}^{\gamma}/_{2}}{\sin {}^{\alpha}/_{2}}$,

$s - b = \frac{a \cdot \cos {}^{\beta}/_{2} \cdot \sin {}^{\gamma}/_{2}}{\cos {}^{\alpha}/_{2}}$. **i.** $t_a = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$, $t_b = \frac{a \sin\gamma}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}$.

k. $\alpha_1 = a \cos\alpha$. **l.** $\cos\alpha_1 = -\cos 2\alpha$ d. h. $\alpha_1 = 180^0 - 2\alpha$ u. s. w.

2. $a = 2r \sin\alpha$, $h_a = 2r \sin\beta \cdot \sin\gamma$, $k_a{}^1 = 2r \cos\alpha$, $k_a = 2r \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$ *), $\varrho = 4r \cdot \sin {}^{\alpha}/_{2} \cdot \sin {}^{\beta}/_{2} \cdot \sin {}^{\gamma}/_{2}$, $\varrho_a = 4r \cdot \sin {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cos {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}$, $fl = 2r^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$, $s = 4r \cdot \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cos {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}$, $s - a = 4r \cdot \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \sin {}^{\beta}/_{2} \cdot \sin {}^{\gamma}/_{2}$.

3. $b = \frac{\varrho \cdot \cos {}^{\beta}/_{2}}{\sin {}^{\alpha}/_{2} \cdot \sin {}^{\gamma}/_{2}}$, $h_b = \frac{2\varrho \cdot \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}}{\sin {}^{\beta}/_{2}}$, $fl = \varrho^2 \cdot \operatorname{ctg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\gamma}/_{2}$, $s = \varrho \cdot \operatorname{ctg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\gamma}/_{2}$, $s - b = \varrho \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2}$, $\varrho_b = \varrho \cdot \operatorname{ctg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\gamma}/_{2}$. **4.** $b = \frac{\varrho_b \cdot \cos {}^{\beta}/_{2}}{\cos {}^{\alpha}/_{2} . \cos {}^{\gamma}/_{2}}$,

$c = \frac{\varrho_b \cdot \sin {}^{\gamma}/_{2}}{\sin {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\alpha}/_{2}}$, $r = \frac{\varrho_b}{4 \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \sin {}^{\beta}/_{2} \cdot \cos {}^{\gamma}/_{2}}$,

$fl = \varrho_b{}^2 \cdot \operatorname{tg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{tg} {}^{\gamma}/_{2}$, $s = \varrho_b \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2}$, $s - a = \varrho_b \cdot \operatorname{tg} {}^{\gamma}/_{2}$, $s - b = \varrho_b \cdot \operatorname{tg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{tg} {}^{\gamma}/_{2}$, $\varrho = \varrho_b \cdot \operatorname{tg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{tg} {}^{\gamma}/_{2}$, $\varrho_c = \varrho_b \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{tg} {}^{\gamma}/_{2}$.

5. Vergl. Aufg. 1, f; Aufg. 2—4; $s^2 = fl \cdot \operatorname{ctg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\gamma}/_{2}$, $(s - c)^2 = fl \cdot \operatorname{tg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{tg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\gamma}/_{2}$. **6.** Vergl. die Aufl. zu Aufg. 1—5; $s - a = s \cdot \operatorname{tg} {}^{\beta}/_{2} \cdot \operatorname{tg} {}^{\gamma}/_{2}$. **7.** Vergl. die Resultate zu den Aufg. 1—6; $s - c = (s - a) \operatorname{tg} {}^{\alpha}/_{2} \cdot \operatorname{ctg} {}^{\gamma}/_{2}$. **8.** $a = \frac{h_a \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$,

$c = \frac{h_a}{\sin\beta}$, $fl = \frac{h_a{}^2 \cdot \sin\alpha}{2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}$, $r = \frac{h_a}{2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}$,

*) Das Rechteck der Höhenabschnitte ist constant.

$$\varrho = \frac{h_a \cdot \sin \alpha/_2}{2 \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}, \quad \varrho_a = \frac{h_a \cdot \sin \alpha/_2}{2 \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2}, \quad \varrho_c = \frac{h_a \cdot \cos \alpha/_2}{2 \sin \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2},$$

$$s = \frac{h_a \cdot \cos \alpha/_2}{2 \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2}, \quad s - a = \frac{h_a \cdot \cos \alpha/_2}{2 \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}, \quad s - c = \frac{h_a \cdot \sin \alpha/_2}{2 \cos \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2}.$$

9. $$a = \frac{(b+c) \sin \alpha/_2}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}, \quad b = \frac{(b+c) \cdot \sin \beta}{2 \cos \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}, \quad r = \frac{b+c}{4 \cos \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}.$$

$$b - c = (b+c) \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}, \quad s = \frac{2(b+c) \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}},$$

$$h_b + h_c = (b+c) \sin \alpha.$$

10. $$(b - c) \operatorname{ctg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta - \gamma}{2}, \quad a = \frac{(b - c) \cos \alpha/_2}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}},$$

$$b = \frac{(b - c) \sin \beta}{2 \sin \alpha/_2 \cdot \sin \frac{\beta - \gamma}{2}}, \quad r = \frac{b - c}{4 \sin \alpha/_2 \cdot \sin \frac{\beta - \gamma}{2}}.$$

11. $$a^2 = \frac{(b^2 - c^2) \sin \alpha}{\sin (\beta - \gamma)}, \quad (b + c)^2 = d^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta - \gamma}{2},$$

$$(b - c)^2 = d^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}, \quad fl = \frac{d^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin (\beta - \gamma)}.$$

12. $$(2r)^2 = \frac{d^2}{1 + \cos \gamma \cdot \cos (\alpha - \beta)}.$$ **13.** $$4\, fl = d^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$4\, r^2 = \frac{d^2}{2 \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$ **14.** $$b = \frac{t_a \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \gamma},$$

$$a = \frac{t_a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}, \quad r = \frac{t_a \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{2 \sin \beta \sin \gamma}, \quad h_a = t_a \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2},$$

$$\varrho = \frac{t_a \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{2 \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}.$$ **15.** $$a = \frac{d}{2 \cos \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}},$$

$$b + c = \frac{d}{\sin \alpha}, \quad h_2 - h_3 = d \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma - \beta}{2}.$$

16. $$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{e} \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma - \beta}{2}, \quad r = \frac{e \cdot \cos \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

$\varrho = \dfrac{e \cdot \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2}$. **17.** $a^2 = \dfrac{d^2 \cdot \sin\alpha/_2}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$, $(b+c)^2 = \dfrac{d^2 \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2}$,

$a(b-c) = d^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}$, $ab = \dfrac{d^2 \cdot \sin\beta}{2\cos\alpha/_2 \cdot \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$,

$ac = \dfrac{d^2 \cdot \sin\gamma}{2\cos\alpha/_2 \cdot \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$, $b^2 - c^2 = \dfrac{d^2 \cdot \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\alpha/_2}$.

18. $h_a = \dfrac{e \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2}$, $b = \dfrac{e \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2 \cdot \sin\gamma}$, $\varrho = \dfrac{e \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2}$,

$\varrho_a = \dfrac{e \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2}$, $\dfrac{1}{\varrho} + \dfrac{1}{\varrho_a} = \dfrac{2}{e}$. **19.** $h_a = \dfrac{e \cdot \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\alpha/_2}$,

$\dfrac{1}{\varrho_c} - \dfrac{1}{\varrho_b} = \dfrac{2}{e}$. **20.** $a = \dfrac{e \cdot \cos\alpha/_2}{\sin\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2}$, $s-a = e \cdot \operatorname{ctg}\alpha/_2$, $\varrho = e$.

21. $h_a{}^2 = e^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\gamma-\beta)$, $a^2 = \dfrac{e^2 \cdot \sin\alpha^3 \cdot \sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta^2 \cdot \sin\gamma^2}$,

$fl = \dfrac{e^2 \cdot \sin\alpha^2 \cdot \sin(\gamma-\beta)}{2\sin\beta \cdot \sin\gamma}$. **22.** $h_a{}^2 = \dfrac{e^2 \cdot \sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}$, $fl = \dfrac{e^2 \cdot \sin(\beta-\gamma)}{2\sin\beta \cdot \sin\gamma}$.

23. $AA_1 : BB_1 : CC_1 = \dfrac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}} : \dfrac{1}{\sin\beta \cdot \cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}} : \dfrac{1}{\sin\gamma \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

24. $\dfrac{AM}{A_1M} = \dfrac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2}$ u. s. w.

25. $B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \cos\alpha/_2 : \cos\beta/_2 : \cos\gamma/_2$.

26. $\dfrac{AC_1}{AB_1} = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta/_2}{\operatorname{ctg}\gamma/_2}$ u. s. w. **27.** $B_1C_1 : B_1M : C_1M = \cos\alpha/_2 : \sin\beta/_2 : \sin\gamma/_2$.

28. Vergl. Aufg. 26; $\dfrac{BM}{BB_1} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha/_2}{\operatorname{ctg}\gamma/_2}$, $\dfrac{CM}{CC_1} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta/_2}{\operatorname{ctg}\alpha/_2}$.

29. $AB_1C_1 : BC_1A_1 : CA_1B_1 = \dfrac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2} : \dfrac{\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta/_2} : \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\gamma/_2}$.

30. $\varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = \operatorname{tg}\alpha/_2 : \operatorname{tg}\beta/_3 : \operatorname{tg}\gamma/_2$, $\varrho : \varrho_b : \varrho_c = \operatorname{tg}\alpha/_2 : \operatorname{ctg}\gamma/_2 : \operatorname{ctg}\beta/_2$.

31. Vergl. das Resultat zu Aufg. 2: $\frac{k_a^1}{k_a} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$ u. s. w. **32.** Ist P der Schnittpunkt der drei Höhen, so ergiebt sich $BPC : CPA : APB = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma$. **33.** Ist AA_1 der (nöthigenfalls) verlängerte Radius, so verhält sich $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$, $\frac{AM}{MA_1} = \frac{\cos(\beta - \gamma)}{\cos\alpha}$. **34.** $BMC : CMA : AMB = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = BM_1C : CM_1A : AM_1B$ u. s. w. **35.** Ist N der Schnittpunkt der Verbindungslinien, so ergiebt sich: $BNC : CNA : ANB = \operatorname{tg}{}^{\alpha}/_{2} : \operatorname{tg}{}^{\beta}/_{2} : \operatorname{tg}{}^{\gamma}/_{2}$.

§ 22.

1. x ist die Gegenkathete von α für die Hypotenuse a und analog die Interpretation von y, z und u. **2.** x und y sehr einfach; z ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem ein Winkel gleich α und die Projektion der ihm anliegenden Kathete auf die Hypotenuse gleich a sind; u die Projektion einer Kathete auf die Hypotenuse, wenn α der Gegenwinkel und a die zweite Kathete. **3.** x die Projektion einer Kathete auf die Hypotenuse a, α der Gegenwinkel; y analog mit x darzustellen; z die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem a die Projektion der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete ist; a Kathete, α Gegenwinkel, u Projektion der zweiten Kathete auf die Hypotenuse. **4.** Die Summe ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Projektion einer Kathete gleich a und der anliegende Winkel gleich α ist; (leicht durch eine Figur zu bestätigen). **5.** Die Summe ist $\frac{a}{2\sin{}^{\alpha}/_{2}{}^{2}}$; sie lässt sich theilen in die beiden Summen
$s_1 = a + a\cos\alpha^2 + a\cos\alpha^4 + \ldots$ und
$s_2 = a\cos\alpha + a\cos\alpha^3 + a\cos\alpha^5 + \ldots$, von denen die erstere (vergl. Aufg. 4) die Hypotenuse AB ist des rechtwinkligen Dreiecks ABC, Winkel $A = \alpha$, CD das Loth auf AB, $DB = a$, die zweite s_2 die Kathete AC ist: darzustellen in einer Figur wie in Aufg. 4. In der That ist

$$AB + AC = \frac{a}{\sin\alpha^2} + \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha^2} = \frac{a}{2\sin{}^{\alpha}/_{2}{}^{2}}.$$

6. Die Summe ist $AB - AC = \frac{a}{2\cos{}^{\alpha}/_{2}{}^{2}}$. **7.** Die Summe ist

$\frac{a \cdot \cos \alpha^2}{\cos 2\alpha}$; in der Figur ist $AB = a$, $BD = a \cdot \text{tg}\alpha^2$, $DF = a \cdot \text{tg}\alpha^4, \ldots$ $AE = a \cdot \cos \alpha^2$ und $AS = \frac{AE}{\cos 2\alpha}$, wenn $ES \perp AE$. **8.** Aehnlich wie in Aufg. 7 lässt sich auch die Summe $\frac{a \cdot \sin \alpha^2}{\cos 2\alpha}$ darstellen. **9.** Ueber $AB = a$ als Hypotenuse wird das rechtwinklige Dreieck ABC construirt mit dem Winkel $BAC = \alpha$ und zum rechtwinkligen Trapez $ABCD$ vervollständigt, ebenso wird unter $AB = a$ als Kathete das rechtwinklige Dreieck BAE construirt mit dem Winkel $ABE = \alpha$ und vervollständigt zum rechtwinkligen Trapez $ABFE$, so ist $CD = a \cdot \cos\alpha^2$ und $EF = \frac{a}{\cos \alpha^2}$, die Linie GH aber als die gesuchte Summe zu erhalten durch Vervollständigung der Parallelogramme $CAGD$ und $EBHF$. **10.** Analog ist die Construktion der einzelnen Summanden und der Summe $\frac{a(1 - \sin \alpha^{10})}{\sin \alpha^8 \cdot \cos \alpha^2}$. **11.** Einfachste Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck. **12.** cos vers $x = \frac{a}{b}$ oder $\sin x = \frac{b-a}{a}$, sin vers $y = \frac{a}{b}$ oder $\cos y = \frac{b-a}{a}$, $\text{ctg}\, z = \frac{a+b}{b}$. **13.** Für b als Hypotenuse und a als Projektion der einen Kathete auf b ist x der Gegenwinkel dieser Kathete, y der anliegende Winkel; für a und b als Abschnitte der Hypotenuse durch die Höhe ist z der an a liegende Winkel des rechtwinkligen Dreiecks. **14.** Man stelle $\frac{a^2}{b^2}$ etwa dar als $\frac{a}{c}$, wo $c = \frac{b^2}{a}$, so ist x der Gegenwinkel der Kathete a in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse c ist, c selbst aber die Hypotenuse für b als Kathete und deren Projektion a auf c; y ist das Complement von x; auch z ist demnach leicht zu construiren. **15.** x ist der Complementwinkel von α; — vom Winkel β wird durch ein Loth auf dem einen Schenkel a ein rechtwinkliges Dreieck abgeschnitten und alsdann über a als Hypotenuse ein zweites rechtwinkliges Dreieck construirt, dessen anliegende Kathete gleich der Gegenkathete von β ist, so ist y der eingeschlossene Winkel; — ähnlich die Construktion von Winkel z. **16.** Man ersetze die Funktionen der gegebenen Winkel durch Quotienten, in denen der Nenner des einen mit dem Zähler des anderen übereinstimmt, z. B. $\sin \alpha = \frac{a}{b}$ und $\sin \beta = \frac{b}{c}$, so ist $\sin x = \frac{a}{c}$ u. s. w.

17. Aehnlich wie in Aufg. 16 setze man z. B. zur Construktion des Winkels x vermittelst zweier rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse c, also etwa in einem Kreise mit dem Durchmesser c, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$, woraus $\sin x = \frac{a}{b}$ u. s. w. **18.** Die Winkel $ABC = \alpha$ und $CBD = \beta$ seien an einander angetragen, $BD = a$ gemacht, $DE \perp BC$, $EG \perp AB$, $DF \perp AB$ gezogen, so ist $GB = x$, $EG = y$, $GF = z$. **19.** Die Winkel $ABC = \alpha$ und $CBD = \beta$ seien an einander angetragen, $BD = a$ gemacht, $DE \perp BD$ bis zum Schenkel CB, ferner $EF \perp AB$ und $DG \perp AB$ gezogen, so ist $FG = x$, $DH = y$, $FB = z$. **20.** Man construire das rechtwinklige Dreieck ABC aus der Kathete $BC = a$ und dem Gegenwinkel α, trage an AC den Winkel $DAC = \beta$ an, so dass BCD geradlinig ist, projicire CD auf AD durch das Loth CE, so ist: $CD = x$, $AD = y$, $CE = z$. **21.** In dem Dreieck, welches die Seiten a und b und als Gegenwinkel der letzteren β enthält (Bedingung $a \sin\beta < b$), ist x der Gegenwinkel von a oder dessen Supplement; — y wird ebenso construirt, nur ist statt $\cos\beta$ einzuführen $\sin(90^\circ - \beta)$ d. h. statt β zu nehmen $90^\circ - \beta$; — z ist der Complementwinkel von y. **22.** Durch den Sinussatz zu erledigen. **23.** Man construire das Dreieck ABC aus der Seite $a = BC$, den Winkeln $\beta = ABC$ und $\gamma = ACB$, so ist x die Höhe auf die Seite a; y die Projektion der Seite AC auf BC; z der untere Abschnitt der Höhe auf die Seite a. **24.** Im Dreieck ABC mit der Seite $BC = a$ und den Winkeln $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ ist x die Seitenergänzung $s - a$ (der Tangentenabschnitt an A des inneren Berührungskreises); $y = \varrho_b$, $z = s$, (der Tangentenabschnitt eines äusseren Berührungskreises bis zum Gegeneckpunkt). **25.** Bei derselben Voraussetzung wie in Aufg. 24 ist $x = \varrho_a$, $y = s - b$, $z = \varrho$. **26.** $x = 2r$; y die Verbindungslinie der Fusspunkte der von B und C auf b und c gefällten Lothe (Höhen); z der obere Abschnitt der Höhe auf a. **27.** x ist das vom Eckpunkt B auf die an A gelegte Tangente des umschriebenen Kreises gefällte Loth; y die Summe der beiden an B und C gelegten Tangenten des umschriebenen Kreises bis zu ihrer Durchschneidung in A_0 ($BA_0 + CA_0 = 2BA_0$); z das von A_0 auf a gefällte Loth, verdoppelt. **28.** Man verlängert $AB = a$ um $BC = b$, errichtet in B das Loth BD, wenn dann $DAB = \beta$ ist, so ist $DCB = x$; wählt man $DCB = \beta$, so ist $ADB = y$; ist endlich $DAB = 90^\circ - \beta$, d. h. $ADB = \beta$, so ist $BDC = z$. **29.** Die Diagonale von C aus eines Parallelogramms, von welchem zwei Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel γ ($= C$)

gegeben sind. **30.** Man führe $b^2 = c^2 - d^2$ ein, so wird x der Gegenwinkel von d in dem Dreieck mit den Seiten a, c, d; — man führe $b^2 = d^2 - c^2$ ein, so hat y dieselbe Bedeutung, wie vorher x. **31.** Man multiplicire die ganze Gleichung mit $2r$, so ist in dem einem Dreieck mit den Winkeln α und β umschriebenen Kreise x der zur Sehne $(a + b)$ gehörige Peripheriewinkel. (Determination: $a + b < 2r$, d. h. $\sin\alpha + \sin\beta < 1$). **32.** Wie Aufg. 31; jedoch ersetze man $\cos x$ durch $\sin(90° - x)$. **33.** Zurückzuführen auf 31, indem man $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos x$ durch $\sin(90° - \alpha)$, $\sin(90° - \beta)$, $\sin(90° - x)$ ersetzt. **34.** Ueber der Basis AB des Dreiecks ABC, dessen Höhe h_c den Gegenwinkel C in die Stücke α und β theilt, als Kathete errichtet man (vielleicht nach Aussen hin) das bei A rechtwinklige Dreieck BAE, in welchem $AE = h_c$ ist, so ist Winkel $AEB = x$. **35.** Ueber der Basis AB des Dreiecks ABC, an welcher die Winkel $CAB = \alpha$ und $CBA = 180° - \beta$ liegen und zu der die Höhe h_c gehören mag, construire man das bei A rechtwinklige Dreieck, dessen zweite Kathete $AE = h_c$ ist, so ist Winkel $ABE = x$. **35a.** Es ergiebt sich $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)$: über der beliebig angenommenen Linie AB als Basis construire man das Dreieck ABC mit den gegebenen Winkeln $A = \alpha$ und $B = \beta$ und verbinde C mit dem Mittelpunkte C_1 von AB, so ist $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, Winkel $CC_1A = x$. Zum Beweise fälle man die Höhe CC_2 u. s. w. **36.** x ist der Winkel β desjenigen Dreiecks, welches zu Seiten a und b und den eingeschlossenen Winkel γ hat. **37.** Im Dreieck ABC ist x der Winkel der Mittellinie m_c von C aus mit der Seite a, oder in einem Dreieck, construirt aus den Seiten $BC = a$ und $CA = b$ und dem Winkel $C = 180° - \gamma$, der Gegenwinkel von b. **38.** In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem Winkel $BAC = \alpha$ construire man über der Kathete $BC = a$ das Dreieck BCD mit dem Winkel $CBD = 45°$ und der Seite $CD = AC$, so ist Winkel $DCB = x$; zum Beweise fälle man $DE \perp BC$ u. s. w. Determination: $\operatorname{tg}\alpha \leqq \sqrt{2}$. **39.** Aehnlich wie Aufg. 38 zu construiren. **40.** Es ist $\sin 2x = 2 \operatorname{tg}\delta$; es muss sein $\operatorname{tg}\delta < \frac{1}{2}$: Ueber der längeren Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel δ als Durchmesser construire man den Halbkreis und trage in diesen die doppelte Gegenkathete von δ als Sehne ein, so ist der dieser zugehörige Peripheriewinkel gleich $2x$. **41.** Es ist $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg}\delta$; Construktion noch einfacher als in Aufg. 40. **42.** Man construire aus den Katheten a und b das rechtwinklige Dreieck ABC, über der Hypotenuse $AB = c$ das rechtwinklige Dreieck ABD, in welchem AB die Hypotenuse und $d = AD$ die eine Kathete, und ziehe

durch C die Linie $A_1B_1 \parallel AB$, so ist Winkel $ACA_1 = x$. Es muss sein $d^2 < a^2 + b^2$. **43.** Wie Aufg. 40; jedoch wird durch C die Linie $A_1B_1 \parallel AD$ gezogen, durch welche der Winkel C innerhalb getheilt wird. **44.** Man construire das Dreieck ABC aus den Seiten $BC = a$, $CA = b$ und dem eingeschlossenen Winkel $ACB = 180° - \delta$, so sind die Winkel $A = x$ und $B = y$. Oder: Ueber der Summe $BC\ (= a) + CA\ (= b)$ als Basis construire man das gleichschenklige Dreieck ABD mit dem Winkel an der Spitze $ADB = \delta$ und verbinde D mit C, so sind x und y die Theile des Winkels δ. **45.** Man construire das Dreieck ACB_1 aus $CB_1 = a$, $CA = b$, $B_1CA = \delta$, verlängere, wenn $a > b$, AB_1 über A hinaus bis B, so dass $CB = CB_1$, so sind die Winkel A und B des Dreiecks ABC bezüglich gleich x und y. **46.** In dem Dreieck ABC, construirt aus $BC = a$, $CA = b$, $\measuredangle ACB = \delta$, theilt die Linie $CD \perp AB$ den Winkel δ in die Stücke $ACD = x$ und $BCD = y$. **47.** Aehnlich wie in Aufg. 46 zu construiren. **48.** Ueber der Sehne $BC + CA = a + b$ wird der Kreis mit dem Peripheriewinkel δ construirt, in C das Loth errichtet bis zur Durchschneidung mit dem Supplementarbogen in D, so ist Winkel $BDC = x$, $ADC = y$. **49.** Construktion ähnlich wie Aufg. 48. **50.** Man construire das Dreieck ABC aus denSeiten $BC = a$, $CA = b$ und dem Winkel $C = 180° - \delta$), so wird $\cos(x - u)$ oder $\cos(u - x) = \frac{d}{AB}$, wo $\operatorname{ctg} u = \frac{a + b\cos\delta}{b\sin\delta}$, d. h. $u = B$ ist: man trage also in den über AB als Durchmesser gezeichneten Kreis $BE = d$ als Sehne ein, so theilt die durch C parallel zu BE gezogene Linie den Winkel δ in die Stücke x und y. (Zwei Lösungen). **51** und **52.** Wie Aufg. 50 zu behandeln.

53. Es ergiebt sich $\operatorname{tg} y = \frac{a - b}{b \operatorname{tg} \gamma}$: — Im Dreieck ABC, construirt aus den Seiten $CB = a$, $CA = b$ und dem Winkel $ACB = \gamma$, wo $a > b$ sein mag, trägt man b von a ab $= CA_1$, zieht A_1D senkrecht auf BC und verbindet den Punkt D der Seite AC mit B, so ist $\measuredangle BDA_1 = y$. **54.** Es ergiebt sich $\cos(x - y) = \sin\delta - \cos\delta$: Man construire das rechtwinklige Dreieck BCA über der Hypotenuse $BC = a$ (beliebig) und Winkel $BCA = \gamma$, mache $AD = AC$, zeichne über BC nach Aussen den Halbkreis, trage in diesen $BE = BD$ als Sehne ein, so ist $ECA = 2x$. **55.** Es ergiebt sich $\sin(x + y + \delta) = \sin\delta \cdot \cos\gamma$, vergl. Aufg. 16. **56.** Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha + u)}{\sin(\beta - u)}$, also eine Gleichung von der Form des Sinussatzes: Stellt man sich demnach a und b als

Seiten eines Dreiecks und $\alpha + u = \alpha_1$ als Gegenwinkel der ersteren a vor, so wird $\beta - u = \beta_1$ der Gegenwinkel von b sein können: dieses Dreieck lässt sich in der That construiren, weil der von a und b eingeschlossene Winkel alsdann gleich $180° - (\alpha_1 + \beta_1) = 180° - (\alpha + \beta)$ wird, also das Supplement von $(\alpha + \beta)$, d. h. gegeben ist. Die Unbekannte x wird nunmehr der Durchmesser des diesem Dreieck umschriebenen Kreises, also gleich $\frac{c_1}{\sin\gamma_1} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha + \beta)}}{\sin(\alpha + \beta)}$.

57. Zu behandeln wie Aufg 56; wollte man hier jedoch $\alpha + u = \alpha_1$ und $\beta + u = \beta_1$ als Gegenwinkel von a und b wählen, so würde sich für den von a und b eingeschlossenen Winkel $180° - (\alpha_1 + \beta_1) = 180° - (\alpha + \beta + 2u)$ ergeben, welcher als nicht gegeben zur Construktion des Dreiecks sich nicht verwerthen lässt. Wählt man aber $\alpha + u$ als Gegenwinkel von a und $180° - (\beta + u)$ als Gegenwinkel von b, so wird der dritte Winkel des Dreiecks gleich $180° - (\alpha + u + 180° - \beta - u) = \beta - \alpha$, also von gegebener Grösse. Für x ergiebt sich alsdann $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta - \alpha)}}{\sin(\beta - \alpha)}$.

58. Man erhält sofort: $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + u)}{\operatorname{tg}(\beta + u)} = \frac{a}{b}$. Es sei $a > b$; so kann man a als die Summe, b als die Differenz zweier Dreiecksseiten a_1 und b_1 ansehen, denen bezüglich die Winkel α_1 und β_1 gegenüberliegen, bestimmt durch die Gleichungen $\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \alpha + u$ und $\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \beta + u$, aus denen sich $\beta_1 = \alpha - \beta$ und $\alpha_1 = \alpha + \beta + 2u$ ergiebt; ebenso wird $a_1 = \frac{a + b}{2}$ und $b_1 = \frac{a - b}{2}$, und weil nach dem Sinussatze $a_1 : b_1 = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1$ ist, erhält man durch Einsetzen ihrer Werthe

$$\sin(\alpha + \beta + 2u) = \frac{(a + b)\cdot\sin(\alpha - \beta)}{a - b},$$

wie in § 11, Aufg. 66. Zur Construktion des Winkels u zeichne man das Dreieck $A_1B_1C_1$ aus den Seiten $a + b = a_1$ und $a - b = b_1$ und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel $\alpha - \beta = \beta_1$ so ist $\alpha + \beta + 2u$ der Gegenwinkel von a_1. Endlich ergiebt sich x als die Ordinate des dem Dreieck $A_1B_1C_1$ umschriebenen Kreises für einen solchen Punkt der Basis B_1C_1 als Axe, durch welchen B_1C_1 in die Stücke a und b getheilt wird.

59. Man verwandelt $b^2 - c^2$ in $a \cdot d$, so wird $\sin u = \frac{d \,.\, \sin\alpha}{a}$,

d. h. u der Gegenwinkel von d in einem Dreieck, welches ausserdem a und α als Seite und Gegenwinkel enthält. **60.** Bezeichnet man den Winkel, welchen die Linie B_1AC_1 mit a bildet, durch x, so ergiebt sich aus der Bedingung $AB_1 \cdot BB_1 = AC_1 \cdot CC_1$, weil $BAB_1 = x + \beta$ und $CAC_1 = x - \gamma$, die Gleichung

$$c^2 \sin 2(x+\beta) = b^2 \cdot \sin 2(x-\gamma), \quad \text{woraus}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{b^2 \cdot \sin 2\gamma + c^2 \cdot \sin 2\beta}{b^2 \cdot \cos 2\gamma - c^2 \cdot \cos 2\beta} = \frac{2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}; \text{ oder}$$

$\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)$; nach Aufg. 35a ist aber $\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma)$ gleich der Cotangente des Winkels, welchen die Mittellinie AA_0 mit der Seite a bildet, folglich Winkel $AA_0B = 2x$; wenn man also den Schnittpunkt von B_1C_1 mit BC durch A_1 bezeichnet, so ist das Dreieck A_0AA_1 gleichschenklig und zwar $A_0A = A_0A_1$, woraus die Construktion sofort zu entnehmen.

§ 23.

1. Es ist $a \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = (b+c) \cdot \sin\alpha/_2$. Construktion. (Vergl. § 22, Aufg. 21.) Wenn man die eben gegebene Relation in der Form $a \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2}\right) = (b+c) \cdot \sin\alpha/_2$ darstellt, so ergiebt sich, dass in dem aus den Seiten $b+c$ und a und dem Gegenwinkel der letzteren $\alpha/_2$ construirten Dreieck der Gegenwinkel von $b+c$ die Grösse $90^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2} = \gamma + \alpha/_2$ hat: wenn man demnach im Dreieck BCD, in welchem $BC = a$, $BD = b+c$, Winkel $D = \alpha/_2$ ist, und demnach $\measuredangle BCD = \gamma + \alpha/_2$, von diesem Winkel den Winkel $\alpha/_2 = DCA$ abträgt, so ist ABC das verlangte Dreieck. **a.** $b = 7{,}9034$, $\beta = 73^\circ 50{,}8'$. **b.** $c = 12$, $\beta = 36^\circ\, 52{,}5'$. **2.** Vergl. die Lösung von Aufg. 1; auch die Construktion ist aus derselben herzuleiten. **a.** $b = 7{,}913$, $\alpha = 55^\circ\, 18{,}3'$. **b.** $b = 145$, $\beta = 106^\circ\, 15{,}6'$. **3.** Es ist $a \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2} = (b-c) \cdot \cos\alpha/_2$; zur Construktion darzustellen in der Form $a \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2} = (b-c) \cdot \sin(90^\circ - \alpha/_2)$: ist also (vergl. Aufg. 1) im Dreieck BCD die Seite $BC = a$, $BD = b-c$ und $\measuredangle BDC = 90^\circ - \alpha/_2$, so ist $BCD = \frac{\beta-\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha/_2 - \gamma$, also wenn man an CD den Winkel BDC anträgt, d. h. über DC als Basis das gleichschenklige Dreieck DCA errichtet, in welchem BDC ein Basiswinkel ist, so ist ABC das verlangte Dreieck.

a. $b = 2{,}0904$, $\beta = 79^\circ\, 10{,}7'$. b. $b = 5{,}905$, $\beta = 82^\circ\, 4{,}8'$. 4. Vergl. die Lösung von Aufg. 3, auch zur Construktion. a. $b = 4{,}2432$, $\beta = 46^\circ\, 36{,}6'$. b. $\beta = 75^\circ\, 48{,}7'$. 5. Es ist $a^2 \cdot \sin(\beta - \gamma) = (b^2 - c^2) \cdot \sin\alpha$, zur Construktion zu bringen auf die Form $\sin(\beta - \gamma) = \frac{(b^2 - c^2) \cdot \sin\alpha}{a^2}$: folglich wenn man (vergl. § 22, Aufg. 59) statt $\frac{b^2 - c^2}{a}$ einführt d, so wird $\sin(\beta - \gamma) = \frac{d \cdot \sin\alpha}{a}$, ist also etwa wie folgt zu construiren: In einen Kreis mit der Sehne a und dem Gegenwinkel α trägt man d als Sehne ein gleich CE und ebenso $CB = a$ und errichtet in der Mitte F von EB das Loth FA bis zur Peripherie, so ist ABC das verlangte Dreieck. a. $\beta = 59^0\, 14{,}4'$. b. $b = 7{,}9153$, $c = 7{,}3928$, $\beta = 76^0 39{,}8'$. 6. Es ist $a[\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] = 2h \cdot \sin\alpha$, woraus $\beta - \gamma$, folglich auch β und γ zu bestimmen. Zur Construktion des Winkels $\beta - \gamma$ und demnach des Dreiecks*) aus dieser Gleichung multiplicire man mit $\frac{2r}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$, so wird die Gleichung $2r \cdot \cos(\beta - \gamma) = 2h - 2r \cdot \cos\alpha$: folglich wenn man über $CB = a$ als Sehne den Kreis construirt mit dem Peripheriewinkel α und in B das Loth $2h = BD$ auf a errichtet, welches den Kreis in E durchschneidet, so ist $DE = 2r \cdot \cos(\beta - \gamma)$, also wenn man $EF = ED$ als Sehne einträgt, weil EC ein Durchmesser des Kreises ist, wird Winkel $FEC = \beta - \gamma$, und demnach $FCB = FCE + ECB = 2\gamma$. Wenn demnach CA die Halbirungslinie ist des Winkels FCB, so ist ABC das verlangte Dreieck. Determination $h_a \overline{\leq} a/2 \operatorname{ctg} \alpha/2$, a. $b = 6{,}8753$, $c = 4{,}0436$, $\gamma = 35^0\, 4{,}6'$. b. $\alpha = 42$, $b = 5{,}8786$, $c = 5{,}0815$. 7. Es ist $a^2 \cdot [\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] = 4fl \cdot \sin\alpha$. Construktion zurückzuführen auf Aufg. 6. a. $\beta = 112^0\, 37{,}2'$, $b = 15$, $c = 13$. b. $\alpha = 45^0\, 40'$, $b = 51$, $c = 25$. 8. Es ist $a^2[\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] = 2bc \cdot \sin\alpha^2$; $b = 3$, $\gamma = 50^0$; die Construktion zurückzuführen auf Aufg. 7. 9. Es ist $a^2 \cdot [\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha] = (b^2 + c^2 - a^2)\sin\alpha . \operatorname{tg}\alpha$. a. $\beta = 113^0 55'$. b. $\alpha = 49^0$, $b = 3{,}9049$, $c = 3{,}1227$; die Construktion durch die Beziehung $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos\alpha$ zurückzuführen auf Aufg. 8. 10. Es ist $2a \cdot \cos \alpha/2 \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} = d$: die Construktion zurückzuführen auf Aufg. 1, wenn man einführt $\frac{d}{\sin\alpha} = b + c$ (§ 22, Aufg. 2). a. $\beta = 84^0\, 50{,}3'$. b. $\alpha = 57^0 19'$.

*) Einfacher ist die Construktion des Dreiecks durch geometrische Oerter.

11. Es ist $2a \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \sin \frac{\beta-\gamma}{2} = d$, durch ein Verfahren wie in Aufg. 8 auf Aufg. 3 zurückzuführen. **a.** $b = 8{,}0653$, $c = 9{,}2962$, $\beta = 54^0\,58{,}3'$. **b.** $\alpha = 43^0\,21'$, $fl = 14{,}58$. **12.** $\beta = 41^0\,14'$, $b = 5{,}1119$, $c = 7{,}6678$. **13.** $(\lambda + \mu) \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2 = \lambda - \mu$. **14.** $s - a = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2$, woraus s und $b + c$ sofort zu construiren. **a.** $b = 30$, $c = 88$, $\beta = 18^0 55{,}5'$. **b.** $b = 29{,}688$, $c = 18{,}355$, $\beta = 119^0\,24{,}7'$. **15.** $s = \varrho_a \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2$, $b = 6{,}4899$, $c = 2{,}7442$, $\beta = 98^0\,15{,}8'$. **16.** $s - b = \varrho_b \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2$, $b = 8{,}7123$, $c = 7{,}1118$, $\beta = 61^0\,17'$. **17.** $\beta = 76^0\,51{,}8'$. **18.** $(\lambda + \mu) \cdot \sin(\beta - \gamma) = (\lambda - \mu) \cdot \sin \alpha$. **19.** $(\lambda + \mu) \cdot \sin(\beta - \gamma) = (\mu - \lambda) \sin \alpha$. **20.** $d = 2a \sin \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$. **21.** $d^2 = a^2 (\cos \beta^2 - \cos \gamma^2) = a^2 \sin \alpha \cdot \sin(\gamma - \beta)$. **22.** Ist AA_1 die Mittellinie und M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so sind im Dreieck MAA_1 bekannt $MA = r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$, $MA_1 = \alpha/_2 \operatorname{ctg} \alpha$ und $\measuredangle MA_1A = 90^0 - \delta$ u. s. w. Es ergiebt sich $\sin MAA_1 = \cos \delta \cdot \cos \alpha$ u. s. w. **23.** Ist AA_1 die Halbirungslinie t_a, so ergiebt sich $a = CA_1 + BA_1 = t_a \sin \alpha/_2 \left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma}\right)$, woraus, wenn man $\frac{t_a \cdot \sin \alpha}{a} = \delta$ setzt: $\cos \frac{\beta-\gamma^2}{2} - \delta \cdot \cos \frac{\beta-\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha^2}{2}$, und wenn man (vergl. § 12, b, β) $\frac{2 \sin \alpha/_2}{\delta} = \operatorname{ctg} \varphi$ einführt: $\cos \frac{\beta-\gamma}{2} = \sin \alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi/_2 \cdot (\beta = 105^0\,15{,}1')$. **24. a.** $\varrho = 2{,}076$, $fl = 25{,}385$. **b.** $\varrho = 2{,}793$, $fl = 45{,}25$. **25.** $a = 15$, $b = 112$, $\gamma = 90^0$, $\cos \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b + c}{4\,r \cdot \cos \alpha/_2}$. **26.** $\sin \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b - c}{4\,r \cdot \sin \alpha/_2}$, $\beta = 76^0\,6{,}3'$, $b = 9{,}7075$. **27.** $\sin(\beta - \gamma) = \frac{b^2 - c^2}{4\,r^2 \cdot \sin \alpha}$.

28. $\cos \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{d}{4 r \sin \alpha \cdot \cos \alpha/_2}$. **29.** $\sin \alpha/_2 = \frac{d}{4\,r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{\beta-\gamma}{2}}$.

30. $\cos(\beta-\gamma)=\frac{h}{r}-\cos\alpha$. **31.** $\cos(\beta-\gamma)=\frac{fl}{r^2\sin\alpha}-\cos\alpha$.

32. $\operatorname{ctg}\alpha/_2=\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$. **33.** $\frac{b+c}{2}=r\cdot\sin\alpha+\varrho\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$.

34. $\frac{b+c}{2}=\varrho_a\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2-r\sin\alpha$. **35.** $\varrho_a=s\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2$ u. jetzt Aufg. 34.

§ 24.

1. $\operatorname{ctg}\alpha/_2=\frac{b+c}{b-c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$. **2.** $\sin\gamma=\frac{\mu\cdot\sin\beta}{\lambda}$.

3. $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$. **4.** Wie Aufg. 1. **5.** Die Winkel β und γ werden wie in Aufg. 3 berechnet und alsdann a gefunden durch die Gleichung: $a=\frac{s\cdot\sin\alpha/_2}{\cos\beta/_2\cdot\cos\gamma/_2}$. **6.** $\operatorname{ctg}\gamma/_2=\frac{b+c+a}{b+c-a}\operatorname{tg}\beta/_2$, $\gamma=85^0\,6{,}3'$, $b=1{,}3723$. **7.** $\operatorname{tg}\gamma/_2=\frac{a-b+c}{a+b-c}\cdot\operatorname{tg}\beta/_2$, $\gamma=59^0\,10{,}9'$, $b=27{,}636$. **8.** $b=2r\cdot\sin\beta$ u. s. w.

9. a. $AA_1=6{,}6761$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}\operatorname{ctg}\alpha/_2$, $\beta=44^0\,32{,}2'$.
b. $\beta=29^0\,32{,}6'$, $AA_1=1{,}7193$. **10.** $\beta=54^0\,38{,}7'$. **11.** Die Winkel wie in Aufg. 9, a.; $AA_2=5{,}4207$. **12.** $s-a=\varrho\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$, $a=23{,}86$, $\beta=104^0\,45{,}5'$. **13.** $\frac{c-(a-b)}{2}=\varrho\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$.

14. Vergl. Aufg. 12; $a=5{,}9893$, $\beta=134^0\,38{,}9'$.

15. $\varrho\cdot s=fl$ u. s. w.; $a=11{,}93$, $b=12{,}729$, $c=2{,}341$, $\gamma=10^0 14{,}5'$. **16.** $a=\frac{2\varrho^2\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2}{h-2\varrho}$, $b+c=\frac{2\varrho\,(h-\varrho)\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2}{h-2\varrho}$.

17. $c-b=2\varrho\cdot\operatorname{ctg}\beta/_2-a$, $\alpha=65^0$, $b=50{,}917$, $fl=216$.

18. $b-c=2\varrho_a\cdot\operatorname{tg}\beta/_2-a$. **19.** $a+c=2\varrho_a\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2-b$.

20. $c=\frac{h_a}{\sin\beta}$, $a-b=2\varrho\cdot\operatorname{ctg}\beta/_2-c$.

21. $s-c=\varrho\cdot\operatorname{ctg}\gamma/_2$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\cdot\operatorname{ctg}\gamma/_2$.

22. $a=(\varrho_a-\varrho)\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$, $b+c=(\varrho_a+\varrho)\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2$.

23. $b=\varrho\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2+\varrho_b\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2$, $c-a=\varrho\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2-\varrho_b\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2$.

24. $a=(\varrho_b+\varrho_c)\operatorname{tg}\alpha/_2$, $b-c=(\varrho_b-\varrho_c)\operatorname{tg}\alpha/_2$.

25. $c=\varrho_a\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2-\varrho_b\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2$, $a+b=\varrho_a\cdot\operatorname{ctg}\alpha/_2+\varrho_b\cdot\operatorname{tg}\alpha/_2$.

26. $b=2r\cdot\sin\beta$, $a-c=2\varrho_a\cdot\operatorname{tg}\beta/_2-b$. **27.** $\operatorname{tg}\alpha/_2=\frac{\varrho_a}{s}$.

28. $s - c = \varrho_a \cdot \operatorname{tg} \beta/_2$, $s - a = \frac{fl}{\varrho_a}$, $b = (s - a) + (s - c)$, $c - a = (s - a) - (s - c)$. **29.** $2bc \cdot \cos \alpha/_2 = (b + c) \cdot t_a$, $b = 42{,}39$, $c = 29{,}61$. **30.** $2bc \cdot \sin \alpha/_2 = (b - c) \cdot t'_a$. **31.** $c = \frac{h_b}{\sin \alpha}$ u. s. w. **32.** Wie Aufg. 31. **33.** Es ist a zu finden. **34.** $h_c - h_b = (b - c) \cdot \sin \alpha$ u. s. w. **35.** Es ist $b + c$ zu finden aus $h_b + h_c$ und α. **36.** $c = \frac{h_a}{\sin \beta}$ u. s. w.

37. (Anschl.) Es ist b zu bestimmen u. s. w. **38.** Gesetzt $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi$, so wird $\cos(\beta - \gamma) = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi}$, $\beta = 121^0\, 46{,}3'$. **39.** $\cos(\beta - \gamma) = \frac{\lambda}{\mu} - \cos \alpha$, $\beta = 101^0\, 52{,}4'$. **40.** Man verlängere im Dreieck ABC die Seite BC über B hinaus um $BE = c$ und über C hinaus um $CD = b$, so sind im Dreieck DAE bekannt $DE = a + b + c$, die zugehörige Höhe h und der Winkel $DAE = 90^0 + \alpha/_2$. Vergl. § 23, Aufg. 6. **41.** Durch ein Verfahren, ähnlich wie in Aufg. 40, construire man auf der Seite CB des Dreiecks ABC die Länge $DE = b + c - a$, so sind im Dreieck DEA bekannt die Grundlinie DE, die Höhe h und der Winkel $DAE = \alpha/_2$ u. s. w. **42.** $bc \cdot \sin \alpha = a \cdot h_a$, § 23, Aufg. 6.

43. $\cos \frac{\beta - \gamma}{2}^2 - 2 \frac{h_a}{b + c} \cos \alpha/_2 \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \alpha/_2{}^2$, gesetzt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2}{h_a}$, so wird $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi/_2$ oder $= - \sin \alpha/_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi/_2$. (Vergl. § 12, b, β.) Die Theile des Winkels α sind $36^0\, 52{,}7'$ und $22^0\, 36{,}7'$; $b = 7{,}5008$. **44.** $\frac{\beta - \gamma}{2} = 9^0\, 34{,}8'$, $a = 5{,}341$, $b = 6{,}2475$. **45.** $\beta = 110^0\, 18{,}4'$. **46.** $\beta = 57^0\, 51'$. **47.** $\sin \alpha/_2{}^2 + \frac{2h}{d} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \sin \alpha/_2 = \cos \frac{\beta - \gamma}{2}^2$, $\beta = 97^0\, 41'$, $a = 6{,}1747$, $b = 8{,}5032$. **48.** $\varrho = \frac{fl}{s}$, $s - a = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2$ u. s. w. **a.** $a = 13{,}477$, $c = 13{,}4$, $\beta = 68^0\, 29'$. **b.** $a = 7{,}9535$, $b = 8{,}4862$, $\beta = 104^0\, 45{,}5'$. **49.** $\varrho_a = \frac{fl}{s - a}$, $s = \varrho_a \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2$ u. s. w.

50. Gesetzt $\frac{fl}{d^2} = \lambda$, so ergiebt sich $\cos \frac{\beta - \gamma}{2}^2 (1 - 4\lambda \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2) = \sin \alpha/_2{}^2$.

51. Gesetzt $\frac{fl}{d^2} = \lambda$, so wird $\sin \frac{\beta - \gamma^2}{2} (1 + 4\lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2) = \cos \alpha/_2{}^2$.

52. $bc = \frac{2fl}{\sin\alpha}$, $a^2 = d^2 + 4fl \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2$.

53. Es ist $\frac{d^2}{4fl} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos(\beta - \gamma) + \cos\alpha}$, gesetzt $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d^2}{4fl}$, so wird $\sin[(\beta - \gamma) - \varphi] = \sin\varphi \cdot \cos\alpha$, $\beta - \gamma = 13^0\,46{,}5'$.

54. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \operatorname{tg}\beta$, $\alpha = 120^0\,20{,}3'$, $b = 1{,}7751$, $c = 0{,}3889$.

55. Wie Aufg. 37; $\alpha = 85^0 34'$, $b = 1{,}6318$, $c = 1{,}2894$.

56. $(b_1 + c_1)\sin(\beta - \gamma) = (b_1 - c_1)\sin\alpha$. 57. Wie Aufg. 56.

58. $2h_a \sin(\beta - \gamma) - d \cdot \cos(\beta - \gamma) = d \cdot \cos\alpha$. 59. Wie Aufg. 58.

60. Man verlängere $m_a = AA_1$ über A_1 hinaus um sich selbst, so dass $AA_1 = A_1E$, so ergiebt sich zunächst $\angle AA_1B = \delta$ durch $\cos\delta = \frac{h_a}{m_a}$ und sind jetzt im Dreieck ABE bekannt $AE = 2m_a$, $ABE = 180^0 - \alpha$, und δ: siehe jetzt § 23, Aufg. 22; $\delta = 77^0\,19{,}2'$, $a = 3{,}124$.

61. $a^2 = d^2 - (d^2 - 4m_a{}^2)\operatorname{ctg} \alpha/_2{}^2$.

62. $$\frac{2a + b + c}{b - c} = \operatorname{ctg} \alpha/_2 \cdot \frac{2\sin \alpha/_2 + \cos\frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin\frac{\beta - \gamma}{2}} = \lambda,$$ folglich, wenn man $\frac{\beta - \gamma}{2} = x$ setzt: $\lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \sin x - \cos x = 2\sin \alpha/_2$ oder $\sin(x - \varphi) = 2\sin \alpha/_2\ \sin\varphi$, wenn $\lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 = \operatorname{ctg}\varphi$.

63. Gesetzt $a + b = e$, $c - b = f$, $\frac{\gamma - \alpha}{2} = x$; so ergiebt sich, wie bei Aufg. 62 die Gleichung:

$$\sin x - \frac{e - f}{e + f}\operatorname{ctg} \beta/_2 \cdot \cos x + 2\cos \beta/_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

$\frac{\gamma - \alpha}{2} = 15^\circ\,36{,}3'$; $a = 2$. 64. $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{d \cdot \sin\varepsilon}{e \cdot \sin\delta} = \operatorname{tg}\varphi$; $\operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi) \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2$, $\beta = 57^\circ 25{,}3'$, $b = 10{,}286$, $c = 8{,}3445$.

§ 25.

1 — 10. Durch eine Seite und eine anliegende Höhe ist ein Winkel des Dreiecks bestimmt, und durch Bestimmung dieses Winkels wird die Aufgabe auf eine Aufgabe des § 24 zurückgeführt. (1. $\gamma = 73^\circ 44{,}4'$, $b = 52$. 2. $\beta = 11^\circ 25{,}3'$, $b = 29$.)

11. Ist δ der spitze Winkel, welchen m_a mit a bildet, so ist $m_a \cdot \sin\delta = h_a$ und weiter b und c aus m_a, $\alpha/2$, δ zu bestimmen.
12. Durch Vermittelung des Inhalts ergiebt sich Winkel α u. s. w.; $\alpha = 43^\circ\,58{,}2'$, $b = 7{,}029$, $c = 6{,}1471$, $\beta - \gamma = 18^\circ\,49{,}5'$.
13. $2r \cdot \sin\alpha = a$ u. s. w. **14.** Zu finden fl, s, $b + c$, $\alpha/2$; $\alpha = 8^\circ\,47{,}8'$. **15.** Zu finden fl, $s - a$, s, $\alpha/2$. **16.** Zu finden fl, $s - b$, $b - c$, $\operatorname{tg}\alpha/2 = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4\,fl}$. **17.** $\operatorname{ctg}\alpha/2 = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4\,fl}$. (Vergl. § 24, Aufg. 50). **18.** Vergl. Aufg. 16.
19. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\,fl} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2a \cdot h_a}$. **20.** Vergl. § 24, Aufg. 53, oder, wenn b_1 und c_1 bezüglich die Projektionen der Seiten b und c auf a sind, so ergiebt sich $b_1 + c_1 = a$ und $b_1^2 - c_1^2$ d. i. $a(b_1 - c_1) = b^2 - c^2$ u. s. w. **21.** $t_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = h_a$, und weiter wie in § 23, Aufg. 6. **22.** Ist $AA_1 = m_a$, so ist das Dreieck ACA_1 aufzulösen. **23.** Man verlängert $AA_1 = m_a$ über A_1 um sich selbst u. s. w.; $a = 2{,}8913$, $\alpha = 67^\circ\,15{,}2'$.
24. $\cos\alpha/2 = \frac{(b+c)\,t_a}{2bc}$. a. $a = 2{,}5739$, $\alpha = 57^\circ\,54{,}6'$. b. $\alpha = 138^\circ\,22'$, $\beta = 24^\circ\,34'$.
25. $\sin\alpha/2 = \frac{(b-c)\,t^1_a}{2bc}$. **26.** $h_b + h_c = (b + c)\sin\alpha$.
27. $h_c - h_b = (b - c)\sin\alpha$. **28.** $b = 2r \cdot \sin\beta$.
29. $2(b + c) \cdot \sin\alpha/2^2 = d$. **30.** Die Linien b, c, d bilden ein Dreieck, dessen Winkel bezüglich sind $180^\circ - \beta$, γ, $\beta - \gamma$.
31. Es ist $b_1 : c_1 = \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = \lambda : \mu$; folglich $\cos\beta : \cos\gamma = \frac{b}{\lambda} : \frac{c}{\mu}$ und $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha/2 = \frac{c\lambda - b\mu}{c\lambda + b\mu}$; andererseits $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\alpha/2$, woraus Winkel α. **32.** Aus $CA_1 : BA_1 = \sin 2\beta : \sin 2\gamma = \lambda : \mu$ ergiebt sich $\cos\beta : \cos\gamma = \lambda c : \mu b$, folglich ist wie in Aufg. 31 $\operatorname{ctg}\alpha/2$ zu erhalten. **33.** Sind CA_1 und BA_1 die Abschnitte der Seite a, so verhält sich $CA_1 : BA_1 = s - c : s - b = \operatorname{ctg}\gamma/2 : \operatorname{ctg}\beta/2 = \lambda : \mu$, ferner $c : b = \sin\gamma : \sin\beta = \sin\gamma/2 \cdot \cos\gamma/2 : \sin\beta/2 \cdot \cos\beta/2$, woraus $\sin\beta/2 : \sin\gamma/2 = \sqrt{\lambda b} : \sqrt{\mu c}$ und $\cos\beta/2 : \cos\gamma/2 = \sqrt{\mu b} : \sqrt{\lambda c}$, und demnach die Winkel β und γ leicht zu bestimmen. (Vergl. § 11, Aufg. 39). **34.** Hier verhält sich $CA_1 : BA_1 = \operatorname{tg}\gamma/2 : \operatorname{tg}\beta/2$ u. s. w.
35. $d \cdot \sin\alpha = h_b + h_c$. **36.** $d^2 \cdot \sin\alpha^2 = h_c^2 - h_b^2$.
37. $2fl \cdot \sin\alpha = h_b \cdot h_c$. **38.** $d^2 \cdot \sin\alpha^2 = h_b^2 + h_c^2$.

39—41. $e \cdot \sin\alpha = d$. **42.** Sind BB_1 und CC_1 die Mittellinien und Winkel $B_1BC = \beta_1$, so ergiebt sich

$$\cos\beta_1 = \frac{9a^2 + 4m_b^2 - 4m_c^2}{12am_b}.$$

43. Man hat $a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2+c^2) = 2(b+c)^2 - 4bc = 2d^2 - 4bc$; folglich $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4m_a^2 - a^2}{2d^2 - a^2 - 4m_a^2}$ und daraus $\operatorname{tg}\alpha/2 = \sqrt{\frac{(d+2m_a)(d-2m_a)}{(d+a)(d-a)}}$. **44.** Durch eine Entwickelung wie in Aufg. 43 ergiebt sich $\operatorname{ctg}\alpha/2 = \sqrt{\frac{(2m+d)(2m-d)}{(a+d)(a-d)}}$.

45. Durch doppelte Darstellung von $\cos\beta_1$ (vergl. Aufg. 42) aus den Dreiecken CBB_1 und CBS, wo S der Schnittpunkt ist der beiden Mittellinien m_b und m_c, ergiebt sich $\frac{b^2}{2} = \frac{4}{3}m_c^2 + \frac{2}{3}m_b^2 - a^2$, ein analoges Resultat ergiebt sich vermittelst des $\cos C_1CB$ für $\frac{c^2}{2}$, und aus beiden durch Addition $b^2 + c^2 = 4(m_b^2 + m_c^2 - a^2)$; woraus jetzt a zu bestimmen.

46. Durch Einführung des Winkels α ergiebt sich $b = \frac{h_c}{\sin\alpha}$ und $c = \frac{h_b}{\sin\alpha}$ und weil $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$ ist, die Gleichung $4m_a^2 \cdot \sin\alpha^2 = h^2_b + h^2_c + 2h_bh_c\cos\alpha$, woraus die Construktion abzuleiten. (§ 22, Aufg. 29. Dreieck $A_1B_1C_1$ aus $b_1 = h_b$, $c_1 = h_c$ und $r_1 = m_a$, so ist $\alpha = 180° - \alpha_1$.)

47. Es ist $b + c = 2r(\sin\beta + \sin\gamma)$; $h_a = 2r \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$, d. h. $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - \frac{b+c}{2r}x + \frac{h_a}{2r} = 0$. **48** und **49.** Zu behandeln wie Aufg. 47.

50. $\sin\beta^2 = \frac{\lambda \cdot h_a}{\mu \cdot 2r}$ und ähnlich $\sin\gamma^2$. **51.** $fl = s \cdot \varrho = \frac{a \cdot h_a}{2}$, u. s. w. $a = 30$, $b = 5$, $c = 29$, $\alpha = 96° 44'$.

52. $fl = (s-a) \cdot \varrho_a = \frac{a \cdot h_a}{2}$; $s \cdot \operatorname{tg}\alpha/2 = \varrho_a$. **53.** $(a+d)\operatorname{tg}\alpha/2 = 2\varrho$.

54. $\varrho \cdot s = fl$. **55.** $(a-d)\operatorname{tg}\beta/2 = 2\varrho$. **56.** $(a-d)\operatorname{ctg}\gamma/2 = 2\varrho_a$.

57. $(a+d)\operatorname{tg}\beta/2 = 2\varrho_b$. **58.** $a = (\varrho_a - \varrho)\operatorname{ctg}\alpha/2$; $s - a = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\alpha/2 = \frac{a\varrho}{\varrho_a - \varrho}$. **59.** $a = (\varrho_b + \varrho_c)\operatorname{tg}\alpha/2$ u. s. w.

60. $b + c = (\varrho + \varrho_a)\operatorname{ctg}\alpha/2$ u. s. w. **61.** $b - c = (\varrho_b - \varrho_c)\operatorname{tg}\alpha/2$.

62. Es ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$ und $fl = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}$; folglich s, $s - a$, . . . zu bestimmen. **63.** Wie Aufg. 62; $\varrho = 5\frac{1}{3}$, $fl = 240$, $a = 37$, $b = 13$, $c = 40$, $\alpha = 67° 22{,}8'$, $\beta = 18° 55{,}5'$. **64.** $b = \frac{d \cdot a_1}{a_1 + a_2}$ u. s. w. **65.** Ist AA_1 die Halbirungslinie des Innenwinkels A, AA_2 die des Aussenwinkels A, so ergiebt sich $A_1A_2 = \frac{2a_1a_2}{a_1 - a_2}$, folglich $\cos\delta = \frac{t_a(a_1 - a_2)}{2a_1a_2}$.

66. Es ist (vergl. Aufg. 64 und 65) $a_1 = \frac{\lambda a}{\lambda + \mu}$ und $a_2 = \frac{\mu a}{\lambda + \mu}$, folglich $\cos\delta = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\, t_a}{2\lambda\mu \cdot a}$. **67.** Es ist $\cos \alpha/2 = \frac{t_a(b + c)}{2bc}$, andererseits $4bc \cos \alpha/2^2 = b(s - a) = (b + c)^2 - a^2$; folglich nach Elimination von $bc : \cos \alpha/2 = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2t_a \cdot (b + c)}$. **68.** Aehnlich wie in Aufg. 67 ergiebt sich: $\sin \alpha/2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2t^1_a(b - c)}$.

69. $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{h_a}{t_a}$, $\operatorname{ctg} \alpha/2 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2}$. **70.** Sind M und M_a die Mittelpunkte, bezüglich des inneren und des der Seite a zugehörigen äusseren Berührungskreises und ist AA_1 die Halbirungslinie t_a, so wird AA_1 durch M und M_a harmonisch getheilt, indem sich verhält $\frac{MA}{M_aA} = \frac{\varrho}{\varrho_a} = \frac{MA_1}{M_aA_1}$, folglich ergiebt sich für $MA = x$ und $M_1A = y : x + y = t_a$ und $x : y = \frac{\varrho_a + \varrho}{\varrho_a - \varrho}$, folglich $2x = \frac{\varrho + \varrho_a}{\varrho_a} \cdot t_a$, $2y = \frac{\varrho_a - \varrho}{\varrho_a} \cdot t_a$ und demnach $\sin \alpha/2 = \frac{\varrho}{x} = \frac{2\varrho\varrho_a}{(\varrho + \varrho_a)\, t_a}$. **71.** Durch eine Entwickelung, ähnlich der für Aufg. 70, ergiebt sich $\cos \alpha/2 = \frac{2\varrho_b \cdot \varrho_c}{(\varrho_b - \varrho_c)\, t_a}$.

72. Es ist $\varrho = (s - a) \operatorname{tg} \alpha/2$ und $\varrho_b = (s - a) \operatorname{ctg} \gamma/2$, folglich $\operatorname{tg} \alpha/2 \cdot \operatorname{tg} \gamma/2 = \frac{\varrho}{\varrho_b}$; ferner vermöge der beiden Gleichungen $s = \varrho_b \cdot \operatorname{ctg} \beta/2$ und $s - a = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/2$, $\varrho_b \cdot \operatorname{ctg} \beta/2 - \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/2 = a$,

und weil $\operatorname{ctg} \beta/_2 = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\varrho_b (\operatorname{tg} \alpha/_2 + \operatorname{tg} \gamma/_2)}{\varrho_b - \varrho}$, durch Elimination von $\operatorname{tg} \gamma/_2$ für $\operatorname{tg} \alpha/_2$ die quadratische Gleichung:

$$\varrho_b{}^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2{}^2 - a(\varrho_b - \varrho) \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 + \varrho^2 = 0.$$

73. Auf ähnliche Weise wie in Aufg. 72 ergiebt sich zur Bestimmung des Winkels α:

$$\varrho_a{}^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2{}^2 - a(\varrho_a + \varrho_b) \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2 + \varrho_b{}^2 = 0.$$

74. Gesucht sei die Seite a des Dreiecks: man hat

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha/_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha/_2{}^2} \text{ und } \operatorname{tg} \alpha/_2 = \operatorname{ctg} \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \beta/_2 \cdot \operatorname{ctg} \gamma/_2 - 1}{\operatorname{ctg} \beta/_2 + \operatorname{ctg} \gamma/_2},$$

$$\text{wo } \operatorname{ctg} \beta/_2 = \frac{a-d}{2\varrho} \text{ und } \operatorname{ctg} \gamma/_2 = \frac{a+d}{2\varrho},$$

nach Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich

$$\operatorname{tg} \alpha/_2 = \frac{a^2 - d^2 - 4\varrho^2}{4\varrho a}, \text{ und demnach}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r} = \frac{(a^2 - d^2 - 4\varrho^2) \cdot 8\varrho a}{(a^2 + 4\varrho^2)^2 - 2d^2(a^2 - 4\varrho^2) + d^4},$$

d. h. zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$(a^2 + 4\varrho^2)^2 - 2d^2(a^2 - 4\varrho^2) + d^4 = 16 r \varrho (a^2 - d^2 - 4\varrho^2),$$

deren Lösung keine Schwierigkeit macht.

§ 26.

1. $\sin 2\alpha = 2\delta$. **2.** $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\delta}$. **3.** Gesetzt $\delta = \operatorname{ctg} \lambda$, so wird $\sin 2\alpha = 2 \operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{ctg} \lambda/_2$. **4.** Gesetzt $\delta = \operatorname{ctg} \lambda$, so wird $\sin 2\alpha = 2 \operatorname{ctg} \lambda \cdot \operatorname{tg} \lambda/_2$. **5.** $\sin 2\alpha = 4\delta(1+\delta)$, d. h. $2\delta < \sqrt{2} - 1$. **6.** $\sin 2\alpha = \delta^2 - 1$, $(1 < \delta < \sqrt{2})$. **7.** $\sin 2x = 1 - \delta^2$. **8.** $\operatorname{ctg} \alpha/_2 = \delta$. **9.** $\operatorname{tg} \alpha/_2 = \delta$. **10.** $\sin 2\alpha = \delta(\delta - 2)$, d. h. $1 < \delta < 1 + \sqrt{2}$. **11.** Wie in Aufg. 10. **12.** $\sin 2\alpha = \delta(\delta + 2)$, d. h. $0 < \delta < \sqrt{2} - 1$. **13.** Gesetzt $\delta = \operatorname{tg} \lambda^2$, so wird $\alpha = 45° - \lambda$, $\delta < 1$. **14.** Gesetzt $\frac{a-b}{a+b+c} = \operatorname{tg} \lambda$, so wird $\sin(2\alpha + \lambda) = \cos \lambda^2$. **15.** Gesetzt $\frac{c+a}{c+b} = \operatorname{tg} \lambda$, so wird $\sin(\alpha - \lambda) = 2 \cos 45° \cdot \sin(\lambda - 45°)$. **16.** Gesetzt $\frac{c-a}{c-b} = \operatorname{tg} \lambda$, so wird $\sin(\alpha - \lambda) = 2 \cos 45° \cdot \sin(45° - \lambda)$.

17. Gesetzt $\delta = \sin\lambda$, so wird $\sin 2\alpha = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda/2^2}$, $1 > \delta^2 > 8/9$.

18. Gesetzt $\frac{a-b}{c-h} = \sin\lambda$, so wird $\sin 2\alpha = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda/2^2}$, $0 < \delta < 1$; $\alpha = 58^\circ 38'$.

19. $\sin\alpha^2 + \delta\cdot\sin\alpha = 1$, $\alpha = 38^\circ 10{,}3'$. **20.** $\sin 2\alpha^2 - 2\delta^2\cdot\sin 2\alpha = 2\delta^2$.

21. $\frac{CM}{C_1M} = \delta$, $\cos(45^0 - \alpha) = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$; $1 < \delta < \sqrt{2}$.

22. $\frac{AM}{A_1M} = \delta = \operatorname{ctg}(45^0 - \beta/2)$, $1 < \delta$.

23. a. $\frac{C_1M}{C_1M_c} = \operatorname{tg}\alpha/2 \cdot \operatorname{tg}\beta/2 = \delta$, $\operatorname{tg}\alpha/2^2 - (1-\delta)\operatorname{tg}\alpha/2 + \delta = 0$, $\delta < 3 - 2\sqrt{2}$. b. $\frac{A_1M}{A_1M_a} = \operatorname{tg}\beta/2 = \delta$. **24.** a. $\frac{CM_a}{CM_b} = \frac{\operatorname{tg}\alpha/2}{\operatorname{tg}\beta/2} = \delta$, $\operatorname{tg}\alpha/2^2 + (1+\delta)\operatorname{tg}\alpha/2 = \delta$. b. $\frac{BM_a}{BM_c} = \operatorname{tg}\alpha/2 = \delta$. **25.** $\operatorname{tg}\alpha/2 = \delta$.

26. $\operatorname{tg}\alpha/2 = \delta$. **27.** $2\cos\alpha = 3\delta - 1$. **28.** $\cos\alpha/2 = \delta/2$.

29. Gesetzt $2\delta = \operatorname{tg}\varphi$, so wird $\cos\alpha/2 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi/2$.

30. $\operatorname{tg}\alpha/2^2 = \frac{3\delta^2 - 1}{1+\delta}$, $\delta^2 > 1/3$. **31.** $\operatorname{tg}\alpha/2 = 0{,}5$, $\alpha = 53^\circ 7{,}8'$.

31a. $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2\delta$, $1 < 4\delta^2 < 5$. Für $\delta = \frac{1}{2}$ ist $\alpha = 90^\circ$; für $\frac{1}{2}\sqrt{5} > \delta > 1$ ergeben sich jedesmal zwei verschiedene Winkel α; für $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ nur ein einziger Winkel, nämlich für welchen $\sin\alpha = \sqrt{0{,}2}$ d. i. $\alpha = 27^\circ 10'$. **32.** Das Dreieck wird gleichseitig. **33.** Ist a. $\delta = \frac{DA_1}{DA}$, so ergiebt sich $\operatorname{tg}\alpha/2^2 = \frac{\delta}{1+\delta}$, und b. für $\delta = \frac{DB_1}{DB}$ wird $\cos\alpha = \delta$.

34. $\alpha = 102^\circ 39{,}6'$. **35.** $\sin(45^\circ - \alpha/2) = \delta\sqrt{2}$.

36. $\cos\alpha = \frac{\nu^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2 - \mu^2\nu^2}{2\lambda^2\mu\nu}$ u. s. w. (Vergl. § 18, Aufg. 37.)

37. $\cos\gamma = \sqrt{(1+\lambda)(1+\mu)}$, $\operatorname{ctg}\beta = \lambda\operatorname{ctg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\alpha = \mu\operatorname{ctg}\gamma$.

38. $\cos\gamma^2 = \frac{1}{\lambda\mu}$; $\cos\alpha : \cos\beta = \sqrt{\lambda} : \sqrt{\mu}$,

d. h. $\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

39. $\sin\gamma^2 = \lambda\mu$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}} : \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

40. $\alpha = 90^0$, $\gamma = 38^0\,10{,}4'$. **41.** $\alpha = 55^\circ$ oder $= 4^\circ\,29{,}4'$.

41a. $\frac{\sin\alpha}{\lambda} + 2\cos\alpha = \mu + \frac{1}{\mu}$. **42.** $\cos\alpha/_2 = \frac{\lambda+\mu}{2}$.

43. Sind die Theile des Winkels α bezeichnet: $BAA_1 = \alpha_1$, $CAA_1 = \alpha_2$, so ergiebt sich: $4\lambda\mu^2\cdot\cos\alpha_1 = 4\lambda^2\mu^2 - \lambda^2 + \mu^2$ und $4\lambda^2\mu\cdot\cos\alpha_2 = 4\lambda^2\mu^2 + \lambda^2 - \mu^2$. **44. a.** $\sin\gamma/_2{}^2 = \frac{1}{(\lambda-1)(\mu-1)}$.

b. $\sin\gamma/_2{}^2 = \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)}$. **45.** $\cos\gamma = \frac{\lambda\mu}{2} - (\lambda-1)(\mu-1)$.

46. $\cos\alpha = \lambda\sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+\lambda^2}}$, $\cos\beta = \mu\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+\mu^2}}$.

47. $\operatorname{tg}\alpha/_2{}^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2-1)}{\mu^2(1-\lambda^2)}$, $\sin\frac{\beta-\gamma}{2}^2 = \frac{1-\lambda^2}{\mu^2-\lambda^2}$, oder $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 2\lambda\mu : \lambda+\mu : \mu-\lambda$. **48.** Es ergiebt sich $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \lambda(1+\mu) : \mu(1+\lambda) : 1-\lambda\mu$, woraus $2\lambda\mu\cdot\cos\gamma = (1+\lambda)(1+\mu) - 2$; u. s. w. **49.** $\operatorname{tg}\alpha/_2 = \frac{2\mu}{\lambda^2-1}$.

50. $\operatorname{tg}\alpha/_2 = \frac{1-\lambda^2}{2\mu}$. **51.** $\sin\gamma/_2{}^2 = \frac{1}{(1+\lambda)\cdot(1+\mu)}$.

52. $\sin\alpha/_2{}^2 = \frac{1}{(1-\lambda)\cdot(1-\mu)}$. **53.** $\sin\alpha/_2 = \frac{\lambda^2+\mu^2-1}{2\lambda\mu}$.

54. $\sin\alpha/_2 = \frac{1-\lambda^2-\mu^2}{2\lambda\mu}$. **55.** $\sin\gamma/_2 = \frac{1+\lambda^2-\mu^2}{2\lambda}$; u. s. w.

56. $\operatorname{tg}\gamma/_2 = \frac{\lambda+\mu+1}{\lambda\mu}$; u. s. w. **57.** $\sin\gamma^2 = \frac{(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu-1)}{4\lambda\mu}$; u. s. w.

58. $\cos\gamma = \frac{(1+\lambda+\lambda\mu)^2}{2(1+\lambda-\lambda\mu)\cdot(-1+\lambda+\lambda\mu)}$; u. s. w.

59. $\operatorname{ctg}\alpha/_2 = \lambda$; $\operatorname{ctg}\beta/_2 = \mu$. **60.** $\operatorname{ctg}\alpha/_2{}^2 = \lambda\mu$.

61. $4\cos\alpha/_2{}^2 = \frac{(\delta+\varepsilon)^2}{1+\delta\varepsilon}$ oder $= \frac{(\delta-\varepsilon)^2}{1-\delta\varepsilon}$, wo $\delta = \frac{\mu(\lambda+1)}{\lambda}$ und $\varepsilon = \mu(\lambda+1)$. **62.** $4\cos\alpha/_2{}^2 = \frac{(\lambda+\mu)^2}{1+\lambda\mu}$ oder $= \frac{(\lambda-\mu)^2}{1-\lambda\mu}$.

§ 27.

1. 9,8996, 12,124, 13,523. **2.** $a = 32{,}073$, $b = 30{,}354$, $c = 22{,}782$, $\beta = 64^\circ\, 37{,}2'$, $fl = 330{,}09$.

3. $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{4} : \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{4} = b_1 - a_1 : b_1 + a_1$, $\varrho = 2{,}8051$.

4. $s_1 = \varrho\left(\frac{1}{\sin \alpha/_2} + \frac{1}{\sin \beta/_2} + \frac{1}{\sin \gamma/_2}\right)$, $\varrho = 0{,}19836$.

5. $s_1 = 2r\,(1 + 4 \cos \lambda/_2 \cdot \cos \mu/_2 \cdot \cos \nu/_2)$.

6. $\frac{d^2\pi}{12 \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma} = 14{,}29$. (Die Rechtecke der Abschnitte der Höhen sind constant). **7.** $\sin \alpha/_2 = \frac{a \cdot \sin\delta}{d}$.

8. $a \cdot \cos\mu \cdot \cos\nu = a_2 \cdot \sin(\mu + \nu) \cdot \cos(\mu - \nu)$, $AM \cdot \cos(\mu + \nu) = -a_2 \cdot \cos(\mu - \nu)$. **9.** $2a \cos\mu \cdot \cos\nu = -a_1 \cdot \sin 2(\mu + \nu)$.

10. $a^2 = {}^4/_9\, m_a^2 \left(1 - \frac{4 \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot \operatorname{ctg}(\mu + \nu)}{\sin(\mu + \nu)}\right)$.

11. Es ist, wenn Winkel $AA_1C = x$ gesetzt wird,

$m_a : a/_2 = \sin\beta : \sin(x - \beta) = \sin\gamma : \sin(x + \gamma)$, folglich $\sin(\gamma - \beta) \cdot \operatorname{tg} x = 2 \sin\beta \sin\gamma$; $x = 83^\circ\, 54{,}6'$, $y = 76^\circ\, 38{,}2'$, $z = 82^\circ\, 32{,}6'$. **11a.** $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = 0$. **12.** Ist α_2 der Winkel, den AA_1 mit AB bildet, so ergiebt sich durch denselben Ansatz wie in Aufg. 11, $\sin\gamma \cdot \sin\alpha_2 = \sin\beta \cdot \sin\alpha_1$, folglich $\cos(\gamma - \alpha_2) = \cos(\beta - \alpha_1) - 2\cos(\beta + \alpha_1)$ u. s. w., $\gamma = 83^\circ\, 12{,}2'$.
13. Man hat $2\, fl = bc \cdot \sin\alpha = a \cdot m_a \cdot \sin\delta$ und aus den Ausdrücken für c^2 und b^2 durch $a/_2$, m_a und δ: $c^2 - b^2 = 2\, a \cdot m_a \cdot \cos\delta$, folglich $2\, b\, c \cdot \sin\alpha = (c^2 - b^2) \operatorname{tg}\delta = 4\, fl$. **14.** Durch Umformung der Gleichung $2\, b\, c \cdot \sin\alpha = (c^2 - b^2) \operatorname{tg}\delta$ (Aufg. 13) ergiebt sich $2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = (\sin\gamma^2 - \sin\beta^2) \operatorname{tg}\delta$ u. s. w., endlich $\cos(\beta - \gamma + \delta) = \cos\delta \cdot \cos(\beta + \gamma) = -\cos\delta \cdot \cos\alpha$.
15 und **16.** $9\, fl \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 3\, m_a^2 - d^2$. **17.** $4\, fl = (4\, d^2 - 5\, a^2) \cdot \operatorname{tg}\alpha$.
18. Man hat $fl - b\,\varrho = \varrho\,(s - b) = \frac{fl}{s}(s - b)$, folglich $s = \frac{fl\,(s - b)}{fl - b\,\varrho}$ und weil $fl = \frac{b\, h_b}{2}$ ist: $s = \frac{h_b\,(s - b)}{h_b - 2\,\varrho}$, d. h. wenn man $s = a + \varrho \operatorname{ctg} \alpha/_2$, $h_b = c \sin\alpha$, $s - b = c - \varrho \operatorname{ctg} \alpha/_2$ einführt: $a + \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/_2 = \frac{c \cdot \sin\alpha\,(c - \varrho \operatorname{ctg} \alpha/_2)}{c \sin\alpha - 2\,\varrho}$. **19.** Ist die gesuchte

Linie $A_1B_1C_1$ und $CB_1 = B_1C_1 = C_1B = x$, $\measuredangle A_1 = u$ und $b > c$, so ergiebt sich, wenn die Diagonale BB_1 gezogen ist, $BB_1 : x = \sin(\beta + u) : \sin\frac{\beta + u}{2} = \sin\gamma : \sin\frac{\beta - u}{2}$, d. h. $2\cos\frac{\beta + u}{2} \cdot \sin\frac{\beta - u}{2} = \sin\gamma$, woraus $\sin u = \sin\beta - \sin\gamma$.

20. $\sin u = \sin\beta - \sin\gamma$. (Vergl. Aufg. 19).

21. Die kleinste Seite wird 15,653 und ein Winkel 71° 43,7′.

22. $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin\gamma \cdot \cos(\beta + \gamma)}{\sin\beta}$, $\frac{CA_2}{BA_2} = \frac{\sin\beta \cdot \cos(\beta + \gamma)}{\sin\gamma}$, $\frac{BA_1}{A_1A_0} = \frac{CA_2}{A_2A_0} = \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$ u. s. w. **23.** $\Delta_0 = \left(\frac{1 + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}\right)^2 \cdot \Delta$.

24. $a_0 = a \cdot \cos\alpha, \ldots \alpha_0 = 180° - 2\alpha$, $\Delta_0 = 2\Delta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, $s_0 = 2r\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = h_0 \cdot \sin\alpha$. (Vergl. § 21, Aufg. 1.)

25. $t_1 = \frac{2r \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$. **26.** Es ist $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = 0$. (Vergl. § 4, Aufg. 49): d. h. der reciproke Werth der mittleren Tangente ist gleich der Summe der reciproken Werthe der beiden äusseren. **27.** $\alpha = 180° - \delta$, $\cos\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b_1 + c_1) \cdot \cos\alpha}{2a_1 \cdot \sin\alpha/2}$, $\beta = 97° 48,5'$, $a = 10,844$, $b = 13,351$, $c = 6,6027$.

28. Eine analoge Formel, wie in Aufg. 27 folgt aus der Beziehung $a_1 : b_1 : c_1 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ für $\sin\frac{\gamma - \beta}{2}$, $\beta = 52° 18,1'$, $a = 6,389$, $b = 5,964$, $c = 7,071$. **29.** 8,8258.

30. $x^2 + (a + b)x = \frac{2ab \cdot \sin\gamma/2^2}{\cos\gamma}$. **a.** 0,2855. **b.** 2,4165.

31. $x = \frac{a - b}{2}$, $b < a$, $\cos\varphi = \frac{4ab}{(3a - b)(a + b)}$, $\varphi = 54° 14,3'$.

32. Sind die Theile des Winkels α durch x und y bezeichnet, so hat man $\sin x : \sin y = b_1 : c_1$, folglich $\operatorname{tg}\frac{x - y}{2} = \frac{b_1 - c_1}{b_1 + c_1}\operatorname{tg}\alpha/2$ d. h. $x = 26° 35,2'$, $AP = 25,17$. **33.** Bei derselben Bezeichnung wie in Aufg. 32 ergiebt sich $x = 119° 54,5'$, $AP = 5,687$.

34. Man hat $\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\beta_2}{2}=\frac{b_1-c_1}{b_1+c_1}\operatorname{ctg}\alpha/2$, folglich $\beta_2=52^\circ\,53'$, $B_2C_2=11{,}286$. **35**. $\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\beta_2}{2}=\frac{\lambda b_1-\mu c_1}{\lambda b_1+\mu c_1}\cdot\operatorname{ctg}\alpha/2$, $\beta_2=41^\circ\,34'$, $B_2C_2=\frac{b_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\lambda+\mu}{\mu}=\frac{c_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\lambda+\mu}{\lambda}=12{,}208$. **36**. Es wird $\beta_2=\gamma_2=90^\circ-\alpha/2$ und $B_2C_2=\frac{b_1+c_1}{\cos\alpha/2}=11{,}112$. **37**. Es ergiebt sich $\cos(\beta_2-\gamma_2)=\frac{2c_1b_1}{d^2}-\cos\alpha$, folglich entweder $\beta_2=83^\circ\,10{,}2'$ oder $=42^\circ\,49{,}8'$ und demnach entweder $B_2C_2=12{,}4755$ oder $=12{,}058$. Determination: Es muss sein $d>\frac{\sqrt{b_1c_1}}{\cos\alpha/2}=5{,}5325$. **38**. Es ergiebt sich $C_2AP=\beta_1=29^\circ\,39{,}1'$, $B_2AP=\gamma_1$, $AP=e=10{,}915$. Gesetzt $AB_2=z$, $AC_2=y$, so hat man die Gleichungen

$$y\sin\beta_1+z\sin\gamma_1=\frac{2d^2}{e}\quad\text{und}\quad yz=\frac{2d^2}{\sin\alpha},$$

folglich sind $u=z\sin\gamma_1$ und $v=y\sin\beta_1$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2-\frac{2d^2}{e}\cdot x+\frac{2d^2\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin\alpha}=0$, woraus $x_1=11{,}193$, $x_2=3{,}6489$: folglich entweder $z_1=27{,}15$, $y_1=7{,}3757$, $\beta_2=14^\circ\,39{,}1'$, $B_2C_2=31{,}256$, oder $z_1=8{,}8506$, $y_1=22{,}626$, $\beta_2=103^\circ\,39{,}5'$, $B_2C_2=27{,}176$. **39**. 14,925, 20,874. **b**. 6,6231, 4,88. **40**. Es ist $b\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)=d$ u. s. w. (vergl. § 13, Aufg. 12); die gesuchten Winkel sind $66^\circ\,12'$ und $59^\circ\,48'$. **41**. Es ergeben sich die Winkel $74^\circ\,56{,}1'$ und $51^\circ\,3{,}9'$. **42**. (Quadratisches Problem). Es ist $AP=10{,}915$ (Aufg. 38) $=e$ und $d=\frac{e}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}+\frac{1}{\sin\gamma_2}\right)$ u. s. w.; $\beta=86^\circ\,13{,}8'$.
43. $CE=9{,}8177$, $CE:CD=108:53$, $\measuredangle(c,d)=86^\circ\,25'$.
44. Gesetzt $\measuredangle BAD=x$, $CAD=y$, so hat man $\sin(\beta+x)=\frac{c\sin\beta}{d}=\frac{a\sin\beta\cdot\sin\gamma}{d\sin(\beta+\gamma)}=\sin(\gamma+y)$; entweder $x=12^\circ\,45{,}1'$, oder $x=93^\circ\,14{,}9'$.

45. Es ist $e = d\left(\frac{\sin x}{\sin\beta} - \frac{\sin y}{\sin\gamma}\right)$ u. $x + y = \alpha$, folgl. durch Elimination von y: $\frac{e\sin\beta\sin\gamma}{d} = (\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)\sin x - \sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos x$, d. h. wenn man setzt $\operatorname{ctg} u = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}$ und $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\sin(u+\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin u}$, $\sin(x-\varphi) = \frac{e\sin\gamma\cdot\sin\varphi}{d\cdot\sin\alpha}$. **46.** Es ist $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\lambda\sin\beta}{\mu\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi$, also $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ)\cdot\operatorname{tg}\alpha/2$, $x = 55^\circ\,32'$.

47. $\operatorname{tg}\frac{y-x}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha/2^2$, $x = 42^\circ\,45{,}5'$.

48. $\cos(x-y) = \frac{2\,e^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{d^2} + \cos\alpha$, $x = 82^\circ\,45{,}6'$ oder $14^\circ\,14{,}4'$, es muss sein $e^2 < \frac{d^2\sin\alpha/2^2}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

49. $\frac{\sin x^2}{\sin\beta^2} = \frac{\sin y^2}{\sin\gamma^2} = \frac{e^2}{d^2}$, $x + y = \alpha$, folglich
$\left(\frac{e^2}{d^2}\sin\beta^2\sin\gamma^2 + \sin\beta^2\cos\alpha^2 - \sin\gamma^2\right)\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\beta} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta \pm \sin\gamma\cdot W$, wo $W^2 = \sin\alpha^2 - \frac{e^2}{d^2}(\sin\beta^2 - \sin\gamma^2) - \frac{e^4}{d^4}\sin\beta^2\cdot\sin\gamma^2$.

50. Es ist $h^2 = d^2\sin\delta^2 = \frac{2\,fl\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$, d. h. $\sin\delta = \frac{e}{d}\sqrt{\frac{2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}}$, und demnach $b = e\sqrt{\frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}}$, $c = e\sqrt{\frac{2\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$. **51.** Es ist $h = d\cdot\sin\delta = \frac{2s\cdot\sin\beta/2\cdot\sin\gamma/2}{\cos\alpha/2}$ (vergl. §21, Aufg. 8) d. h. $\sin(x+\beta) = \sin(y+\gamma) = \frac{e}{d}\cdot\frac{\sin\beta/2\sin\gamma/2}{\cos\alpha/2}$.

52. Es ergiebt sich ähnlich wie in Aufg. 51: $\sin(x+\beta) = \frac{e}{d}\cdot\frac{\cos\beta/2\cdot\cos\gamma/2}{\cos\alpha/2}$. **53.** $\sin(x+\beta) = \frac{2\varrho\cos\beta/2\cdot\cos\gamma/2}{d\cdot\sin\alpha/2}$.

54. $\frac{\sin(x+\beta/2)}{\sin\beta/2} = \frac{\sin(y+\gamma/2)}{\sin\gamma/2}$, woraus

$$\operatorname{tg}\frac{y-x+(\gamma-\beta)}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{4}\cdot\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha/4)^2.$$

55. $MA = \frac{s-a}{\cos \alpha/_2} = \sqrt{\frac{bc \cdot (s-a)}{s}} = 2{,}582$, $MB = 3{,}4023$, $MC = 4{,}3205$, $\triangle BMC = \frac{abc \cdot \sin\alpha}{4s} = 5{,}7153$, $CMA = 4{,}899$, $AMB = 4{,}0825$. **56.** $\varrho_a = 3\sqrt{6} = 7{,}3485$, $M_aA = \sqrt{\frac{bcs}{s-a}} = 11{,}619$, $M_aB = \sqrt{\frac{ac(s-c)}{s-a}} = 8{,}4802$, $M_aC = 7{,}9374$, $\triangle BCM_a = \frac{abc \cdot \sin\alpha}{4(s-a)} = 25{,}72$, $CAM_a = 22{,}045$, $ABM_a = 18{,}371$. **57. a.** Das Rechteck der beiden Linien AM und AM_a ist gleich dem Rechteck der beiden den Winkel A einschliessenden Seiten b und c. **b.** Denselben Werth hat das Rechteck aus AM_b und AM_c. **58.** $AB_1C_1 = 0{,}9031$, $BC_1A_1 = 2{,}0395$, $CA_1B_1 = 3{,}377$. **59.** $AB_2C_2 = 18{,}288$, $BC_2A_2 = 2{,}476$, $CA_2B_2 = 1{,}115$. **60.** Bogen $BC = 2{,}7389$, $CA = 2{,}9909$, $AB = 3{,}1008$. Segment $B_1C_1 = 0{,}7793$, $C_1A_1 = 0{,}7071$, $A_1B_1 = 0{,}6027$, das krummlinige Dreieck $A_1B_1C_1 = 1{,}2701$.
61. $B_1C_1 = 1{,}8358$, $C_1A_1 = 2{,}4468$, $A_1B_1 = 2{,}8246$.
62. $A_0 = 40^\circ\, 31{,}7'$, $B_0 = 134^\circ\, 48{,}2'$, $C_0 = 4^\circ\, 40'$.
63. Die den Kreisen um A und C, sowie um B und C gemeinschaftlichen Tangenten sind parallel, wenn

$$\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sqrt{\sin\alpha} + \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sqrt{\sin\beta} = \cos\alpha/_2 \cdot \cos\beta/_2 \cdot \sqrt{\sin\gamma}.$$

64. $A_0B_0 = r_a \cdot \operatorname{tg} \alpha_0/_2 + r_b \cdot \operatorname{tg} \beta_0/_2 + 2\sqrt{r_a \cdot r_b} = 8{,}0027$, $B_0C_0 = 63{,}917$, $C_0A_0 = 69{,}791$. **65.** $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$, $\frac{r}{3}(2\sqrt{3}+3)$.
66. Die Winkel des Centraldreiecks sind bestimmt durch die Proportion $\sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha = 1+\lambda : 1+\lambda : 2$, woraus $\lambda > 1$; sind die Winkel des gesuchten Dreiecks α_0, β_0, β_0, so wird

$$\cos\beta_0 = \sin\alpha_0/_2 = \frac{2\sqrt{\lambda} - (\lambda-1)\sqrt{\lambda(2+\lambda)}}{(\lambda+1)^2}.$$

67. a. Die Werthe von λ sind bestimmt durch die cubische Gleichung $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$, von deren Wurzeln $\lambda = 2$ der Aufgabe entspricht. **b.** Aus dem Werthe $\alpha_0 = 180^\circ$ ergiebt sich für λ der Werth $\frac{1}{4}$. **c.** Die Lösung der Aufgabe führt auf die Gleichung des vierten Grades $\lambda^4 - 12\lambda^3 + 34\lambda^2 - 20\lambda + 1 = 0$, deren linke Seite sich darstellen lässt als das Produkt der beiden Ausdrücke $\lambda^2 - 6\lambda + 3 \pm 2\sqrt{2}(\lambda - 1)$, so dass die Wurzeln sind 0,7187, 8,1097, 0,0551, 3,1165. **68.** $\frac{r}{4}$. **69.** Die Winkel des durch

die Centralen gebildeten Dreiecks ABC sind bestimmt durch die Proportion $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \mu + \nu : \nu + \lambda : \lambda + \mu$. Es sei $\lambda < \mu < \nu$, d. h. $\alpha > \beta > \gamma$. Die Winkel des Tangentendreiecks seien α_0, β_0, γ_0, so ergiebt sich:

$$\cos(\alpha_0 - \alpha) = \frac{4\lambda\sqrt{\mu\nu} - (\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\lambda + \mu)(\lambda + \nu)} \text{ u. s. w.}$$

70. Es sei alsdann $\alpha_0 = 2R$, so hat man

$$-\cos\alpha = \frac{4\lambda\sqrt{\mu\nu} - (\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\lambda + \mu)(\lambda + \nu)} = \frac{\mu\nu - \lambda\mu - \lambda\nu - \lambda^2}{(\lambda + \mu)(\lambda + \nu)},$$

woraus $2\lambda\sqrt{\mu\nu} = \mu\nu - \lambda\mu - \lambda\nu$ oder $\lambda = \frac{\mu\nu}{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}$. (Vergl. Algebr. Aufg. § 10, Aufg. 41). **70 a.** Gesetzt $\sqrt{\lambda} = \cos\varphi$, so ergiebt sich $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{r_1}\cdot\cos\varphi}{2\cos{\varphi/2}^2}$. **71.** Es muss sein $\beta_0 = \beta$, d. h. $\frac{r_1 - x}{r_1 + x} = \frac{x - r_2}{x + r_2}$, woraus $x^2 = r_1 r_2$. **72.** Zur Bestimmung der Radien x der der Basis anliegenden Kreise hat man $a = 2x(1 + \operatorname{ctg}{\beta/2})$, d. h. $x = \frac{a\sin 45^\circ\cdot\sin{\beta/2}}{2\sin(45^\circ + {\beta/2})}$, — und alsdann zur Bestimmung des Radius y des dritten Kreises die Gleichung: $b = y\operatorname{ctg}{\alpha/2} + x\operatorname{ctg}{\beta/2} + 2\sqrt{xy}$. Für $\alpha = 90^\circ$ ergiebt sich $x = {a/4}(2 - \sqrt{2})$ und $y = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$, d. h. $\frac{y}{x} = 0{,}7187$. **73.** $r_1 = \operatorname{tg}(45^\circ - {\alpha/4})^2\cdot r$, $r_2 = \operatorname{ctg}(45^\circ - {\alpha/4})^2\cdot r$. **74.** $\frac{2r\pi\cdot\cos(45^\circ - {\alpha/4})^2}{\sin{\alpha/2}}$. **75.** $x_1\cdot\cos{\alpha/4}^2 = 8r\cdot\left(\sin\frac{45^\circ + {\alpha/4}}{2}\cdot\cos\frac{45^\circ - {\alpha/4}}{2}\right)^2$, $x_2\cdot\cos{\alpha/4}^2 = 8r\left(\cos\frac{45^\circ + {\alpha/4}}{2}\cdot\sin\frac{45^\circ - {\alpha/4}}{2}\right)^2$. **76.** $x = r\cdot\operatorname{ctg}{\alpha/2}\cdot\operatorname{tg}{\alpha/4}$.

77. Man erhält $\frac{x}{\sin{\alpha/2}} = r\operatorname{ctg}{\alpha/4} \pm \sqrt{x(x + 2r)}$, und demnach

$$x_1\operatorname{ctg}{\alpha/2} = \frac{8r\cdot\operatorname{ctg}{\alpha/4}}{\cos{\alpha/2}}\left(\sin\frac{45^\circ + {\alpha/4}}{2}\cdot\cos\frac{45^\circ - {\alpha/4}}{2}\right)^2,$$

$$x_2\operatorname{ctg}{\alpha/2} = \frac{8r\cdot\operatorname{ctg}{\alpha/4}}{\cos{\alpha/2}}\left(\cos\frac{45^\circ + {\alpha/4}}{2}\cdot\sin\frac{45^\circ - {\alpha/4}}{2}\right)^2.$$

78. $x = r \cdot \operatorname{tg} \alpha/2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha/4$. **79.** $r \cdot \operatorname{ctg} \alpha/4 = x + \sqrt{x(x+2r)}$; woraus $x = \frac{r}{4} \cdot \frac{\sin \alpha/2 \cdot \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + \alpha/4)}$. **80.** $\frac{r}{4} \cdot \frac{\sin \alpha/2 \cdot \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha/4)}$.

81. $x = (r - x) \sin \alpha/2$, d. h. $x = \frac{r \cdot \sin \alpha/2}{2 \cos(45^\circ - \alpha/2)^2}$.

82. Ist ϱ der Radius des Kreises K (Aufg. 81), so ist $2\sqrt{\varrho y} + \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/2 = \sqrt{r(r-2y)}$, d. h. $\sqrt{\frac{y}{\varrho}} = \frac{r\sqrt{2} - \varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha/2}{r + 2\varrho}$.

82 a. Es ergiebt sich $\operatorname{tg} MCA = 1/7$, woraus die Construktion sehr einfach herzuleiten; ist weiter N der Mittelpunkt des dem Quadranten eingeschriebenen Kreises, so ist $\operatorname{tg} MCN = 0{,}75$, d. h. MCN ist der kleinste Winkel des rechtwinkligen Dreiecks 3, 4, 5.

83. Es ist $r \cdot \operatorname{ctg} \alpha/2 = r_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1/2 = r_2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2/2$. **84.** Wie Aufg. 83.

85. $r \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$, $r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$, $r \cdot \operatorname{tg} 70^\circ$. **86.** Es ergiebt sich $r_1 : r_2 : r_3 = \operatorname{tg} \alpha_1/2 : \operatorname{tg} \alpha_2/2 : \operatorname{tg} \alpha_3/2$, und daraus $\operatorname{tg} \alpha_1/2^2 = \frac{r_1(r_1 + r_2 + r_3)}{r_2 r_3}$ u. s. w., $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 126^\circ\, 52{,}2'$, $\alpha_3 = 143^\circ\, 7{,}8'$.

87. $r_1 = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2/2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_3/2$ u. s. w. **88.** Die gemeinschaftlichen Tangenten der drei gegebenen Kreise gehen durch denselben Punkt und mögen die Winkel α, β, γ mit einander bilden, so hat man (vergl. § 37, Aufg. 6) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, ferner $\cos\alpha = \frac{-2mn}{(m+x)(n+x)}$ u. s. w., folglich, wenn noch $\lambda = \frac{1}{l}$, $\mu = \frac{1}{m}$, $\nu = \frac{1}{n}$ gesetzt wird, $x = \frac{\lambda + \mu + \nu \pm \sqrt{2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}}{(\lambda + \mu + \nu)^2 - 4(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)}$.

89. Sind AB und AC die gegebenen Tangenten, D der Punkt und M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, so sind $\angle BAM = \alpha$ und $DAM = \beta$ gegeben und gesucht $ADM = x$. Es ergiebt sich $\sin x = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, woraus die Construktion leicht (§ 22, Aufg. 17). Es ergeben sich zwei Lösungen, jenachdem $x <$ oder $> \pi/2$ ist.

90. Sind r der Radius, D der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ziehe man durch einen Punkt A der Halbirungslinie des Winkels O, der von den gegebenen Tangenten die Entfernung $AO = \frac{r}{\sin\alpha}$ hat, Parallelen zu den gegebenen Tangenten und legt dann an diese und durch D nach Aufg. 89 den Kreis. **91.** Gegeben die beiden Punkte A und B und der Kreis um C mit dem Radius r; es sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, D der Berührungs-

punkt, ferner $BC = a$, $AC = b$: zu finden seien die Winkel $ACM = x$ und $BCM = y$. Man hat $x + y = BCA = \gamma$. Ist jetzt DE der zu C gehörige Durchmesser des gesuchten Kreises und sind A_1 und B_1 bezüglich die Projektionen von A und B auf DE, so hat man $DE = \frac{DB^2}{DB_1} = \frac{DA^2}{DA_1}$, d. h. (I) $DA_1 \cdot DB^2 = DB_1 \cdot DA^2$ oder $(b \cos x - r)(a^2 + r^2 - 2\,ar \cos y) = (a \cos y - r)(b^2 + r^2 - 2\,br \cos x)$, woraus $(b \cos x - r)(a^2 - r^2) = (a \cos y - r)(b^2 - r^2)$, d. i. (II) $DA_1 \cdot t_b{}^2 = DB_1 \cdot t_a{}^2$, wenn t_a und t_b bezüglich die von A und B an den gegebenen Kreis gelegten Tangenten bezeichnen. Aus den Gleichungen (I) und (II) ergiebt sich $DA : DB = t_a : t_b$ und daraus leicht die Construktion. Ebenso ist die Bestimmung der Winkel x und y aus den dargestellten Gleichungen ohne Schwierigkeit. **92.** Gegeben der Punkt C, der Kreis um A mit dem Radius r, $AC = b$, und die Linie L, bestimmt durch ihre Entfernung $CB = a$ von C und den Winkel $ACB = \gamma$, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei M, der Radius desselben $MC = x$, zu finden seien ausserdem die Winkel $ACM = u$ und $BCM = v$, deren algebraische Summe also gleich α gegeben ist, vielleicht $u + v = \alpha$: ferner hat man die Gleichungen $(r + x)^2 = b^2 + x^2 - 2\,b\,x \cdot \cos u$ und $\cos v = \frac{a - x}{x}$ d. h. $x = \frac{a}{1 + \cos v}$ u. s. w. **93.** Auf Aufg. 92 zurückzuführen, indem man den kleineren Kreis durch seinen Mittelpunkt, den grösseren durch einen concentrischen Kreis mit dem Radius $r - \varrho$, endlich die gegebene Linie durch eine im Abstande ϱ von ihr parallel gezogene Linie ersetzt. **93 a.** Es ergiebt sich durch eine Entwickelung, ähnlich der von Aufg. 92:

$$x = \frac{c^2 - r^2}{2\,(r + c \cos u)} = \frac{l + 1}{1 + \cos v}, \text{ d. h. } 20 \cos u - 11 \cos v = 9$$

und $u + v = 60°$, folglich $u = 25° 26{,}9'$, und demnach $x = 3{,}9352$. **94.** Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise seien A und B und ihre Radien bezüglich r und ϱ, ferner sei C der gegebene Punkt $AC = b$, $BC = a$, $\measuredangle BCA = \gamma$. Ist M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, x der Radius desselben und bezeichnet man $MCA = u$, $MCB = v$, so habe man etwa $u + v = \gamma$, ferner ergiebt sich aus den beiden Dreiecken MCA und MCB bezüglich $(r + x)^2 = b^2 + x^2 - 2\,b\,x \cos u$ und $(\varrho + x)^2 = a^2 + x^2 - 2\,a\,x \cos v$, d. h. $2\,x = \frac{b^2 - r^2}{r + b \cos u} = \frac{a^2 - \varrho^2}{\varrho + a \cos v}$, u. s. w. **95.** Auf die

Lösung von Aufg. 94 leicht zurückzuführen. **95 a.** Der gesuchte Kreis ist concentrisch demjenigen, welcher durch den Punkt A geht und Kreise berührt, die um B und C bezüglich mit den Radien 1 und 2 beschrieben sind. Zur Bestimmung von u und v dienen jetzt (vergl. Aufg. 94) die Gleichungen $u + v = 53^\circ\, 7{,}8'$ und $45 \cos v - 49 \cos u = 4$, woraus $u = 36^\circ\, 52{,}2'$ (es ist absichtlich hier nur eine einzige Lösung durchgeführt) und demnach wird der Radius eines der gesuchten Kreise gleich $6\frac{3}{11}$.

§ 28.

1. Sind a und b die Seiten, δ der Winkel der Diagonalen, so wird $2\,fl = (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \delta$. **2.** Sind die Diagonalen d, e und γ der Winkel, so wird $4fl = (e^2 - d^2) \operatorname{tg} \gamma$. (Es ist $a^2 - b^2 = d\,e \cos \delta$.)
3. $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\,de \sin \delta}{e^2 - d^2}$. **4.** Sind β und γ die nicht gegebenen Winkel eines der durch die erste Diagonale abgeschnittenen Dreiecke, so hat man $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$, $fl = \frac{d^2 \cdot \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$, wo $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ gesetzt ist u. s. w.; $\beta = 57^\circ\, 5'$, $fl = 0{,}58043 \cdot d^2$.
5. Sind die gesuchten Winkel α und β, so ergiebt sich $\cos(\alpha - \beta + \delta) = \cos \delta \cdot \cos(\alpha + \beta)$ (vergl. § 27, Aufg. 14); — $\alpha = 87^\circ 35{,}6'$. **6.** Es ergiebt sich $\sin(\delta - \beta) \cdot \sin(\delta + \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin \beta$ und daraus $\cos(2\delta + \alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$, $\delta = 54^\circ\, 25{,}2'$. **7.** $\cos \gamma = \frac{(\lambda^2 + 1)\,(\mu^2 - 1)}{2\lambda\,(\mu^2 + 1)}$.
8. $\cos \gamma = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 1}{2\sqrt{-\lambda^2\mu^2\,(1 - 2\lambda^2) \cdot (1 - 2\mu^2)}}$.
9. $2 \sin \gamma = (\lambda - 1/\lambda) \operatorname{tg} \delta$. **10.** $2 \sin \delta = (1/\lambda - \lambda) \operatorname{ctg} \gamma$.
11. Es ergiebt sich $x - 1/x = 2 \cdot \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \delta}$, folglich $x = \operatorname{ctg} \varphi/2$ $(= -\operatorname{tg} \varphi/2)$, wenn $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \delta}$, — ebenso wird $y = \operatorname{ctg} \psi/2$ $(= -\operatorname{tg} \psi/2)$, wenn $\operatorname{ctg} \psi = \frac{\sin \delta}{\operatorname{ctg} \gamma}$ gesetzt ist. **12.** In Aufg. 11 hat sich ergeben $\frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \varphi/2$, wo $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \delta}$ war: demnach wird jetzt $\frac{a\sqrt{2}}{s} = \frac{\cos \varphi/2}{\sin(\varphi/2 + 45^\circ)}$, $\frac{b\sqrt{2}}{s} = \frac{\sin \varphi/2}{\sin(\varphi/2 + 45^\circ)}$,

$2fl = s^2 \cdot \operatorname{tg} \delta$. **13.** Die Diagonalen werden $\frac{e \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos \psi/2}{\sin(\psi/2 + 45^\circ)}$ und $\frac{e \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin \psi/2}{\sin(\psi/2 + 45^\circ)}$, wo $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sin \delta}{\operatorname{ctg} \gamma}$ ist; $fl = e^2/4 \operatorname{ctg} \gamma$.

Folgerung. Parallelogramme von gleichem Umfang und Diagonalwinkel haben gleichen Inhalt; ebenso Parallelogramme, welche in der Summe der Diagonalen und den Winkeln übereinstimmen. **14.** (Vergl. Aufg. 12.) $a = \frac{e \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos \varphi/2}{\sin(45^\circ - \varphi/2)}$, $b = \frac{e \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin \varphi/2}{\sin(45^\circ - \varphi/2)}$, $fl = e^2/2 \cdot \operatorname{tg} \delta$. **15.** $fl = e^2/4 \cdot \operatorname{ctg} \gamma$.

16. $fl = \frac{h_1 h_2}{\sin \gamma}$, $\operatorname{tg} \delta = \frac{2 h_1 h_2 \cdot \sin \gamma}{h_1^2 - h_2^2}$. **17.** $fl = \frac{2 h_1^2 h_2^2}{(h_1^2 - h_2^2) \operatorname{tg} \delta}$ (Aufg. 16).

18. $\operatorname{tg} \delta = \frac{2 \lambda \sin \gamma}{\lambda^2 - 1}$ $(= -\operatorname{tg} 2\varphi \cdot \sin \delta$, wenn $\lambda = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt wird).

19. $2\lambda \sin \gamma = (\lambda^2 - 1) \operatorname{tg} \delta$, ($\lambda = \operatorname{ctg} u/2$, wenn $\sin \gamma \cdot \operatorname{ctg} \delta = \operatorname{ctg} u$ gesetzt ist). **20.** $fl = \frac{e^2 \operatorname{tg} \delta}{2 \sin \alpha^2}$. **21.** $\sin \varepsilon = \frac{2fl}{cd} \cdot \frac{a-b}{a+b}$, oder wenn man das durch die Seiten $a - b$, c, d gebildete Dreieck durch Δ bezeichnet: $\sin \varepsilon = \frac{2\Delta}{cd}$. **22.** $2fl = \frac{a+b}{a-b} \cdot cd \sin \varepsilon$, wo $a - b = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varepsilon}$. **23.** $\gamma + \delta = 180^\circ - \varepsilon$, $\sin \gamma : \sin \delta = c : d$; folglich $\operatorname{tg} \frac{\gamma - \delta}{2} = \frac{c-d}{c+d} \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon/2$. **24.** Es ergiebt sich $a - b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2cd \cos \varepsilon}$ und $\frac{a+b}{2} = m$; oder man berechnet zuerst γ und δ, wie in Aufg. 23 und dann nach dem Sinussatz $a - b$ u. s. w. **25.** Die erstere ist $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 + 2cd \cos \varepsilon}$, die letztere $\frac{2cd \cos \varepsilon/2}{c+d}$.

26. $2cd \cos \varepsilon/2 = (c + d) e$.

27. Es ist $cdm^2 \cos \varepsilon = \Delta^2 \pm \sqrt{(c^2 m^2 - \Delta^2)(d^2 m^2 - \Delta^2)}$: der Inhalt ist möglichst gross, wenn $\Delta = cm$ oder $= dm$ ist, für welche Werthe bezüglich $\cos \varepsilon = c/d$ oder $= d/c$ ist.

28. $fl = \frac{gm \cdot \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$ **29.** Aus der Beziehung $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\Delta}{gm} = \lambda$ ergiebt sich $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}^2 - \sin \varepsilon/2^2 = 2\lambda \cdot \cos \varepsilon/2 \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ u. s. w.

15*

30. Es ist $c = \frac{2\varrho}{\sin\alpha}$, $d = \frac{2\varrho}{\sin\beta}$, $a = \frac{\varrho \cdot \cos \varepsilon/_2}{\sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2}$, $b = \frac{\varrho \cdot \cos \varepsilon/_2}{\cos \alpha/_2 \cdot \cos \beta/_2}$. **31.** $fl = (c+d)\varrho$, $\sin\alpha = \frac{2\varrho}{c}$, $\sin\beta = \frac{2\varrho}{d}$.

32. Es ist $\frac{\cos \beta/_2}{\sin \alpha/_2} = \sqrt{\lambda\mu}$ und $\frac{\cos \alpha/_2}{\sin \beta/_2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}$, woraus α und β leicht zu bestimmen. **33.** $e = \frac{2\varrho}{\sin\alpha_1}$, $f = \frac{2\varrho}{\sin\beta_1}$,

$$a = \frac{\varrho \cdot \cos\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}}{\sin \alpha_1/_2 \cdot \cos \beta_1/_2}, \quad b = \frac{\varrho \cdot \cos\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}}{\cos \alpha_1/_2 \cdot \sin \beta_1/_2}.$$

34. Es ist $\sqrt{\lambda\mu} = \frac{\cos \beta_1/_2}{\cos \alpha_1/_2}$ und $\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\sin \alpha_1/_2}{\sin \beta_1/_2}$ u. s. w.

35. $4fl = (a^2 - b^2)\operatorname{tg}\alpha$, $2r\sin 2\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}$: es ist demnach r der Radius des umschriebenen Kreises für ein Dreieck, welches a und b zu Seiten und den Supplementwinkel von 2α zum eingeschlossenen Winkel hat. Oder wenn man den Winkel $DAB = \alpha$ eines gleichschenkligen Trapezes durch Antragen des Winkels $DAE = \alpha$ verdoppelt und EA über A hinaus um b verlängert, so dass $AF = b$ wird, so ist F ein Punkt des umschriebenen Kreises, und umgekehrt: ist F bei dieser Construktion auf der Verlängerung von AE ein Punkt des umschriebenen Kreises, so ist $AF = b$.. **36.** Es wird $4r^2\cos 2\alpha = -ab \pm \sqrt{(4r^2 - a^2)(4r^2 - b^2)}$. **37.** Ist $a > b$, so ist der kleinste Radius $r = a/_2$, alsdann ist $\cos 2\alpha = -\frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. **38.** $\cos(a, c) = \frac{\lambda - \mu}{2}$.

39. $\cos(b, c) = \frac{(1-\mu)^2 + \nu^2 - \lambda^2}{2\nu(1-\mu)}$, $\cos(b, d) = \frac{(1-\mu)^2 + \lambda^2 - \nu^2}{2\lambda(1-\mu)}$.

40. $\cos(e, f) = \frac{(\mu^2 + 1)\lambda^2 - \mu^2\nu^2(1 + \lambda^2)}{2\lambda\mu}$,

$\cos(e, a) = \frac{\lambda^2(\mu^2 - 1) + \mu^2\nu^2(1 + \lambda)^2}{2\nu\lambda\mu^2(1 + \lambda)}$. **41.** Bezeichnet man den Winkel (c, f) durch x, den Winkel (d, e) durch y, so hat man die Gleichungen $c^2 + f^2 - 2cf\cos x = d^2 + e^2 - 2de\cos y$ und $cf\sin x = de\sin y$, in welche die Verhältnisse λ, μ, ν

einzuführen sind: führt man dann ein $\varDelta = \frac{\lambda^2(1+\mu^2\nu^2)-\mu^2(\lambda^2+\nu^2)}{2\lambda\mu\nu}$, so ergiebt sich $2\mu\varDelta \cdot \cos y = \lambda^2 - \mu^2 - \varDelta^2$.

42. $h = r(\cos\alpha \mp \cos\beta)$, $m = \frac{a+b}{2} = 2r \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$fl = mh = 2r^2 \sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}^2$; ist 2μ der zur mittleren Sehne gehörige Centriwinkel, so ergiebt sich: $2\cos\mu = \cos\beta \pm \cos\alpha$.

43. Es ist $x = 2r\sin\mu$ und $2\cos\mu = \cos\alpha + \cos\beta$ (Aufg. 42), woraus $4\sin\mu^2 = \sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + 2(1-\cos\alpha\cos\beta) = 2\sin\alpha^2 + 2\sin\beta^2 + (\cos\beta - \cos\alpha)^2$, folglich, wenn mit r^2 multiplicirt wird: $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + h^2$.

44. Zu den Sehnen $2a$, $2b$, $2c$ mögen bezüglich die Centriwinkel 2α, 2β, 2γ gehören, so hat man für die Abstände $(a,b) = r(\cos\beta - \cos\alpha)$, $(b,c) = r(\cos\gamma - \cos\beta)$, $(a,c) = h = r(\cos\gamma - \cos\alpha)$. Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich

$$(\lambda+\mu)\cos\beta = \lambda\cos\gamma + \mu\cos\alpha; \text{ ferner ist}$$
$$h^2 = r^2(\cos\gamma^2 + \cos\alpha^2 - 2\cos\gamma\cos\alpha) \text{ und}$$

$2\lambda\mu\cos\alpha\cos\gamma = (\lambda+\mu)^2\cos\beta^2 - \lambda^2\cos\gamma^2 - \mu^2\cos\alpha^2$; eingesetzt:

$$\begin{aligned}\lambda\mu \cdot h^2 &= r^2[\lambda\mu\cos\gamma^2 + \lambda\mu\cos\alpha^2 - (\lambda+\mu)^2\cos\beta^2 + \lambda^2\cos\gamma^2 + \mu^2\cos\alpha^2] \\ &= r^2[\lambda\mu + \lambda\mu - (\lambda+\mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2 \\ &\quad - (\lambda\mu+\lambda^2)\sin\gamma^2 - (\lambda\mu+\mu^2)\sin\alpha^2 + (\lambda+\mu)^2 \cdot \sin\beta^2] \\ &= (\lambda+\mu)r^2[(\lambda+\mu)\sin\beta^2 - \lambda\sin\gamma^2 - \mu\sin\alpha^2] \\ &= (\lambda+\mu)[(\lambda+\mu)b^2 - \lambda c^2 - \mu a^2].\end{aligned}$$

§ 29.

1. Gegeben die Seite $AB = a$, $ABC = \beta$, $BAD = \alpha$, $BAC = \alpha_1$, $ABD = \beta_1$, so ist $\alpha + \beta_1 = \beta + \alpha_1$ oder $\alpha - \beta = \alpha_1 - \beta_1$, und es ergiebt sich $2r\sin(\alpha+\beta_1) = a$, $BC = b = 2r\sin\alpha_1 = \frac{a\sin\alpha_1}{\sin(\alpha+\beta_1)}$,

$CD = c = 2r\sin(\alpha - \alpha_1) = \frac{a\sin(\alpha-\alpha_1)}{\sin(\alpha+\beta_1)}$, u. s. w.

$fl = \frac{a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha_1+\beta_1)}{2\sin(\alpha+\beta_1)^2}$. **2.** Gegeben die Diagonale $AC = e$ und die von der zweiten Diagonale $BD = f$ und den Seiten eingeschlossenen Winkel, bezeichnet durch diejenigen griechischen Buchstaben, welche den Gegenseiten $AB = a$, $BC = b$,

$CD = c$, $DA = d$ entsprechen, also $(a, f) = \delta_1$, $(b, f) = \gamma_1$, $(c, f) = \beta_1$, $(d, f) = \alpha_1$, wo $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180°$ ist, so ergiebt sich $a = \frac{e \cdot \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}$ u. s. w., $r = \frac{e}{2 \sin(\alpha_1 + \beta_1)}$; $f = \frac{e \cdot \sin(\beta_1 + \gamma_1)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}$, $fl = \frac{e^2 \cdot \sin(\beta_1 + \gamma_1) \cdot \sin(\alpha_1 + \gamma_1)}{2 \sin(\alpha_1 + \beta_1)}$.

3. Bei gleicher Bezeichnung wie in Aufg. 1 ergiebt sich $r^2 = \frac{fl}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1)}$. 4. Bezeichnung wie in Aufg. 1. Gegeben a, b, β, $f = BD$, so ist $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$ und $(2r =) \frac{e}{\sin \beta} = \frac{f}{\sin \alpha}$, wodurch Winkel α bestimmt ist u. s. w.

5. Bezeichnung wie bei Aufg. 1. Man vervollständige das Parallelogramm $ADCF$ und verbinde F mit B, so sei $\alpha = 100°$, $\beta = 53°$. Es ist $\measuredangle\ DCF = \beta = DAF$, folglich $FAB = \alpha - \beta$: demnach sind im Dreieck ABF bekannt zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel u. s. w. $b = 5{,}5685$, $d = 2{,}288$.

6. Das Viereck heisse ABB_1A_1, gegeben seien $AB = c$, $A_1AB = \alpha$, $B_1BA = \beta$; AA_1 und BB_1 mögen sich verlängert in C unter dem Winkel γ schneiden, so dass im Dreieck ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ferner sei f das vom Mittelpunkt des Kreises auf AB gefällte Loth, so ergiebt sich $AA_1 = c \cos \alpha + 2f \sin \alpha$ und $BB_1 = c \cos \beta + 2f \sin \beta$, oder durch Einführung des Winkels $AA_1B = AB_1B = \gamma_1$ wird $\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{c}{2f}$ und demnach $AA_1 = 2r \sin(\gamma_1 + \alpha)$, $BB_1 = 2r \sin(\gamma_1 + \beta)$, $AB_1 = 2r \sin(\gamma_1 - \gamma)$.*)

7. Bezeichnung wie in Aufg. 6. Gegeben $AB = c$, $A_1B_1 = c_1$, α und β: Nach Aufg. 6 ist durch die beiden Gegenseiten c und c_1 und die Summe der Winkel α und β, d. i. den Winkel γ, der Radius r bestimmt. Construirt man nämlich den durch c als Sehne und γ als Peripheriewinkel bestimmten Kreis und legt an diesen, etwa in B, die Tangente und macht dieselbe BC_1 gleich der Gegenseite A_1B_1, so ist der dem Dreieck ABC_1 umschriebene Kreis zugleich dem gesuchten Viereck umschrieben. Für die

*) Weil der Ausdruck für die Gegenseite A_1B_1 von AB nur γ, d. i. $(\alpha + \beta)$ enthält, also von den Winkeln α und β im Einzelnen unabhängig ist, so hat man den Satz:

Wenn man über einer geraden Linie AB als gemeinschaftlicher Sehne zwei Kreise construirt und einen beliebigen Punkt C des einen mit A und B verbindet, so ist die zu den Verbindungslinien gehörige Sehne A_1B_1 des zweiten Kreises von constanter Länge.

Berechnung ergiebt sich $AC_1^2 = c^2 + c_1^2 + 2cc_1 \cos(\alpha + \beta)$; $r = \frac{AC_1}{2\sin(\alpha+\beta)}$, $AA_1 = AC - A_1C = \frac{1}{\sin\gamma}(c \sin\beta - c_1 \sin\alpha)$, $BB_1 = BC - B_1C = \frac{1}{\sin\gamma}(c\sin\alpha - c_1\sin\beta)$, $2fl\cdot\sin\gamma = (c^2 - c_1^2)\cdot\sin\alpha\sin\beta$.

8. Gegeben die beiden Gegenseiten $AB = c$ und $A_1B_1 = c_1$, die Diagonalen seien BB_1 und AA_1, ihr Schnittpunkt C_0 und die Winkel $B_1BA = \beta_0$ und $A_1AB = \alpha_0$ gegeben. Es ergiebt sich auch hier, dass wenn man über AB als Sehne einen Kreis beschreibt mit dem Peripheriewinkel $180° - (\alpha_0 + \beta_0)$ und an ihn in B die Tangente legt $BC_1 = A_1B_1$, der dem Dreieck ABC_1 umschriebene Kreis zugleich dem gesuchten Viereck umschrieben ist. Es ergiebt sich $AC_1^2 = c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos(\alpha_0 + \beta_0)$ und $r = \frac{AC_1}{2\sin(\alpha_0 + \beta_0)}$, $AA_1 = AC_0 + A_1C_0 = \frac{1}{\sin\gamma_0}(c\sin\beta_0 + c_1\sin\alpha_0)$, $BB_1 = BC_0 + B_1C_0 = \frac{1}{\sin\gamma_0}(c\sin\alpha_0 + c_1\sin\beta_0)$.

9. Bezeichnung wie in Aufg. 2. Gegeben e, f, β_1 und δ_1: führt man ein $DC_1 = \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef\cos(\beta_1 - \delta_1)}$, so ist $r = \frac{DF}{2\cos(\beta_1 - \delta_1)}$ u. s. w. **10.** Ist ε der zu e gehörige Centriwinkel, also $e = 2r\sin\varepsilon$, und $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, so ergiebt sich $fl = 2re\cdot\sin\alpha\sin(\varepsilon + \alpha_1 - \alpha_2)$. **11.** Nach dem Satze in Aufg. 6 ergiebt sich, wenn man $AC_1 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varepsilon}$ einführt, $r = \frac{AC_1}{2\sin\varepsilon}$: nennt man jetzt die zu den Seiten a, b, c, d gehörigen Centriwinkel bezüglich $2\alpha_2$, $2\beta_2$, $2\gamma_2$, $2\delta_2$ so hat man $\sin\alpha_2 = \frac{a}{2r}$, $\sin\beta_2 = \frac{b}{2r}$, $\sin\gamma_2 = \frac{c}{2r}$, demnach $\delta_2 = 180° - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)$ und $d = 2r\cdot\sin\delta_2$. Es wird $AC_1 = 3{,}2$, $r = 6{,}5$, $\gamma_2 = 90°$ (M liegt auf c), $\beta_2 = 22° 37{,}2'$, $\alpha_2 = 13° 20{,}5'$, $\delta_2 = 54° 2{,}3'$, $d = 10{,}545$, $\measuredangle(d, c) = 35° 57{,}7'$, $(b, c) = 67° 22{,}8'$. **12.** Wie in Aufg. 11 ergiebt sich $AC_1 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}$, $r = \frac{AC_1}{2\sin\theta}$ u. s. w., $b = 2{,}2924$, $d = 4{,}4436$, $\alpha = 63° 9{,}5'$, $\beta = 99° 34{,}9'$. **13.** Vergl. Aufg. 7. Gegeben c, c_1, α, β: gesetzt $AC_1 = \sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos(\alpha + \beta)}$, so wird $r = \frac{AC_1}{2\sin(\alpha+\beta)}$ und $fl = \frac{ef\cdot\sin\theta}{2} = \frac{(c^2 - c_1^2)\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$,

woraus $\sin\theta = \frac{c^2 - c_1^2}{4r^2 \sin(\alpha+\beta)}$. **14**. Es ergiebt sich $\cos(b, c) = -\cos(a, d) = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2}{2(\beta\gamma - \alpha\delta)}$ u. s. w. **15**. Es ergiebt sich $\cos(a, e) = \cos(c, f) = \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2 - \gamma^2 - \theta^2}{2(\alpha\varepsilon - \gamma\theta)}$ u. s. w.

16. Es ergiebt sich $\frac{b}{d} = \sqrt{\lambda\mu}$; $\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$; $\frac{e}{f} = \frac{1+\mu}{1+\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}$, und dadurch kommt die Aufgabe auf 14 oder 15 zurück. **17**. Durch die Winkel λ, μ, ν sind die sämmtlichen Winkel des Vierecks bestimmt: In der That seien im Viereck $ABCD$ mit den Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ bezeichnet die Schnittpunkte (a, c) durch M, von (b, d) durch N, und von $AC = e$ und $BD = f$ durch L, und nunmehr Winkel $BLA = \lambda$, $DMA = \mu$, $BNA = \nu$, ferner die den Seiten a, b, c, d bezüglich zugehörigen Peripheriewinkel durch α_1, β_1, γ_1, δ_1, endlich die Winkel A, B, C, D des Vierecks selbst durch α, β, γ, δ, so ergeben sich zu deren Bestimmung die folgenden Gleichungen:

$$\alpha + \beta + \nu = \alpha + \delta + \mu = \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ,$$

und daraus $\alpha = 90^\circ - \frac{\mu+\nu}{2}$; $\gamma = 90^\circ + \frac{\mu+\nu}{2}$; $\delta = 90^\circ - \frac{\mu-\nu}{2}$; $\beta = 90^\circ + \frac{\mu-\nu}{2}$. Ferner ist $\alpha_1 + \gamma_1 = \lambda$ und $\alpha_1 - \gamma_1 = \nu$, d. h. $\alpha_1 = \frac{\lambda+\nu}{2}$, $\gamma_1 = \frac{\lambda-\nu}{2}$, und endlich $\delta_1 + \beta_1 = 180^\circ - \lambda$ und $\delta_1 - \beta_1 = \mu$, d. h. $\beta_1 = 90^\circ - \frac{\lambda+\mu}{2}$, $\delta_1 = 90^\circ - \frac{\lambda-\mu}{2}$. Nunmehr hat man $a = 2r \cdot \sin\alpha_1 = 2r \cdot \sin\frac{\lambda+\nu}{2}$, $b = 2r \cdot \sin\beta_1 = 2r \cdot \cos\frac{\lambda+\mu}{2}$, u. s. w., $e = 2r \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1) = 2r \cdot \cos\frac{\mu-\nu}{2}$, $f = 2r \cdot \sin(\alpha_1 + \delta_1) = 2r \cdot \cos\frac{\mu+\nu}{2}$, $fl = 2r^2 \cdot \cos\frac{\mu+\nu}{2} \cdot \cos\frac{\mu-\nu}{2} \cdot \sin\lambda$. **18**. Bezeichnung wie in Aufg. 17: Gegeben a, λ, μ, ν: Es ist $r = \frac{a}{2\sin\frac{\lambda+\nu}{2}}$,

$$b = \frac{a \cdot \cos\frac{\lambda+\mu}{2}}{\sin\frac{\lambda+\nu}{2}} \text{ u. s. w., } fl = \frac{a^2 \cdot \cos\frac{\mu+\nu}{2} \cdot \cos\frac{\mu-\nu}{2} \cdot \sin\lambda}{\sin\frac{\lambda+\nu^2}{2}}.$$

19. Es ist nach Aufg. 17 $r^2 = \dfrac{fl}{2\cos\frac{\mu+\nu}{2} \cdot \cos\frac{\mu-\nu}{2} \cdot \sin\lambda}$.

20. Bezeichnung wie in Aufg. 17: Gegeben sei der Winkel $(a, c) = \mu$, $b + d = g$ und λ, so ergiebt sich $b + d = 2r(\sin\beta_1 + \sin\delta_1) =$ $= 2r\left(\cos\frac{\lambda+\mu}{2} + \cos\frac{\lambda-\mu}{2}\right) = 4r \cdot \cos\lambda/_2 \cdot \cos\mu/_2 = g$.

21. Gegeben μ, ν, $e - f = g$. Wie in Aufg. 20 ergiebt sich aus Aufg. 17: $g = 4r \cdot \sin\mu/_2 \sin\nu/_2$. **22.** Gegeben λ, μ, ν und $ABC - ADC = \varDelta$: unter Benutzung der in Aufg. 17 gewonnenen Resultate ergiebt sich $\varDelta = 2r^2\cos\frac{\mu+\nu}{2} \cdot \cos\frac{\mu-\nu}{2} \cdot \cos\lambda$.

23. Es ergiebt sich $fl = r^2/_2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta)$ $= 2r^2\sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\gamma+\alpha) \cdot \sin(\alpha+\beta)$. (Vergl. § 6, Aufg. 1.)
23a. Das betreffende Vieleck ist ein regelmässiges 14-Eck: wird $\gamma = \frac{\pi}{14}\left(=\frac{90^\circ}{7}\right)$ gesetzt, so ergiebt sich

$$fl = 2r^2 \cdot \sin 5\gamma \cdot \sin 6\gamma = 2r^2 \cdot \cos\gamma \cos 2\gamma.$$

24. Zieht man die Diagonale AC (e), so ergiebt sich

$$fl = ABC + ADC = \tfrac{1}{2}(ab \cdot \sin B + cd \cdot \sin D)$$
$$= 2r^2\sin(\alpha+\beta)(\sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\gamma \cdot \sin\delta).$$

Durch Vergleichung dieses Resultates mit dem von Aufg. 23 ergiebt sich $\sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\gamma \cdot \sin\delta = \sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\gamma+\alpha)$, wo $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ$. (Vergl. § 6, Aufg. 9.) **25.** Bei einer Bezeichnung wie in Aufg. 23 ergiebt sich (siehe Aufg. 24) $\sin\alpha \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \sin\delta = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\delta)$, multiplicirt man diese Gleichung mit $2r \cdot 2r$, so wird die Relation der Ptolemäische Satz. **26.** Der Satz folgt aus der Gleichung $\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot \cos\delta = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\delta)$. (Vergl. § 6, Aufg. 11). **26a.** Folgt aus der Gleichung

$$\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\delta = \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\beta+\gamma).$$

27. Durch Multiplication mit $r^2/_2$ und wenn man den Mittelpunkt M des umschriebenen Kreises mit den beiden Gegenecken A und C verbindet und von M aus Lothe auf $AB = a$ und $BC = b$ fällt,

bezüglich MA_1 und MB_1, ergiebt sich, dass $ABCM - CDAM = 4\,A_1MB_1 - ACD$. **28.** Bezeichnet man die vom Mittelpunkte M auf die Seiten AB, BC, . . . gefällten Lothe durch Klammern, also durch $[AB]$, $[BC]$, . . ., so ergiebt sich durch Multiplication mit $2r^2$: $CD \cdot [AB] - AD \cdot [BC] = AC \cdot [BD]$ d. h. die Differenz der beiden aus je einer von zwei anstossenden Seiten und dem Lothe auf die Gegenseite gebildeten Rechtecke ist gleich dem Rechteck aus derjenigen Diagonale, welche mit den zuerst gewählten Seiten ein Dreieck bildet, und dem Lothe auf die andere Diagonale. **29.** Hier ergiebt sich durch Multiplication mit $2r^2$: $AB \cdot [CD] + CD \cdot [AB] = BC \cdot [AD] + AD \cdot [BC]$: d. h. für die Gegenseitenpaare sind die Summen der Rechtecke, gebildet aus Seite und Loth auf die Gegenseite, einander gleich. **30.** Sind $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ die Seiten und $A = \alpha$, $B = \beta$, . . die Winkel des Vierecks, so ergiebt sich:

$$a = \frac{\varrho \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2} \text{ u. s. w.}, a + c = \frac{\varrho \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2} = b + d,$$

$fl = (a + c)\,\varrho =$ u. s. w. **30a.** Die Richtigkeit ergiebt sich, nach Multiplication mit ϱ^2, aus der Summation der rechtwinkligen Dreiecke, in welche das Viereck durch die Verbindungslinien des Mittelpunktes M mit den Eckpunkten und die Lothe von M aus auf die Seiten zerfällt. (Vergl. Aufg. 50.)

31. Gegeben a und die Winkel. Es ist $\varrho = \dfrac{a \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$,

$$fl = \frac{a^2 \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

32. $$\varrho = \frac{s \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}.$$

33. $$\varrho^2 = \frac{fl \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}.$$

34. Sind A_1, B_1, C_1, D_1 bezüglich die Berührungspunkte der Seiten a, b, c, d, so ergiebt sich $A_1B_1 = 2\varrho \cos \beta/2$, u. s. w. $fl = \varrho^2/2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta) = 2\varrho^2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}$. (Vergl. § 6, Aufg. 1.)

35. $fl_1 = 2fl \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2$. **36.** Multiplicirt man die Gleichung mit $\varrho^2 \cdot \sin \frac{\gamma + \delta}{2}$ und dividirt durch $\sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2$, so ergiebt sich

$$(AM \cdot BM + CM \cdot DM) \cdot \sin \frac{\gamma + \delta}{2} = fl,$$

d. i. $\Delta\, AMB + \Delta\, CMD = \frac{1}{2} fl$ oder $= \Delta\, BMC + \Delta\, DMA$, oder weil alle diese Dreiecke gleiche Höhe (ϱ) haben, $AB + CD = BC + AD$. **37.** Durch ein Verfahren wie in Aufg. 36 ergiebt sich: $AM \cdot CM + BM \cdot DM = \dfrac{fl}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}$.

38. Indem man ϱ einmal durch a, α, β und dann durch c, γ, δ ausdrückt, ergiebt sich $c \cdot \sin \gamma/2 \cdot \sin \delta/2$ d. i. $c/2 \left(\cos \frac{\gamma - \delta}{2} - \cos \frac{\gamma + \delta}{2}\right) = a \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2$ u. s. w. $\varrho = 1{,}9085$, $\gamma = 119° \, 1{,}3'$, $b = 3{,}3982$, $d = 4{,}6018$. **39.** Aus der Beziehung (Aufg. 38) $\frac{a}{c} = \frac{\sin \gamma/2 \sin \delta/2}{\sin \alpha/2 \sin \beta/2}$ ergiebt sich $\frac{\sin \alpha/2}{\sin \delta/2} = \frac{c \cdot \sin \gamma/2}{a \cdot \sin \beta/2}$ [: $= \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt :] u. s. w., d. i.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \delta}{4} = \operatorname{tg}(45° - \varphi) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta + \gamma}{4}, \quad \varphi = 38° \, 57{,}1',$$

$\frac{\delta - \alpha}{4} = 5° \, 4{,}7'$, $\alpha = 69° \, 50{,}6'$. **40.** Wird die gesuchte Seite durch x bezeichnet, so ist die vierte Seite $(a + x - b)$: nunmehr erhält man durch die doppelte Darstellung der Diagonale AC aus den Dreiecken ACB und ACD für x die quadratische Gleichung $x^2 + (a - b)\, x \cdot \sin \delta/2^2 = ab \cdot \sin \beta/2^2$, und aus dieser $x = \frac{a - b}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi/2$, wenn man $\frac{2\sqrt{ab} \cdot \sin \beta/2}{(a - b) \cdot \sin \delta/2} = \operatorname{tg} \varphi$ einführt.

41. Ist nur eine besondere Deutung der quadratischen Gleichung in Aufg. 40. **42.** Gegeben a, b, α, γ: bezeichnet man die Seiten DC und DA bezüglich mit x und y, so hat man (Aufg. 41) $\frac{x}{y} = \frac{a \sin \alpha/2^2}{b \sin \gamma/2^2}$ und $y - x = a - b$ u. s. w. (Wenn die Gegenwinkel eines Tangentenvierecks einander gleich sind, so zerfällt dasselbe durch die die beiden anderen Ecken verbindende Diagonale in zwei congruente Dreiecke.)

43. Es findet die Beziehung statt $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1/2}{\operatorname{tg} \alpha_2/2} = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1/2}{\operatorname{tg} \gamma_2/2}$.

44. Eine unmittelbare Folgerung aus der Proportion in Aufg. 43.

45. Aus den Gleichungen $\operatorname{ctg}\alpha/_2 + \operatorname{ctg}\beta/_2 = \frac{a}{\varrho}$ und $\operatorname{ctg}\beta/_2 + \operatorname{ctg}\gamma/_2 = \frac{b}{\varrho}$ ergiebt sich $\operatorname{ctg}\alpha/_2 - \operatorname{ctg}\gamma/_2$, d. h. $\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\alpha/_2 \cdot \sin\gamma/_2} = \frac{a-b}{\varrho}$ u. s. w.

46. Man hat (Aufg. 41) $\frac{\sin\alpha/_2}{\sin\gamma/_2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$ und (Aufg. 45) $\frac{\varrho}{a-b} = \frac{\sin\alpha/_2 \cdot \sin\gamma/_2}{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}$; es ergiebt sich $\gamma = 170° \, 7'$, $\varrho = 0{,}9261$.

47. Die Diagonalen sind $\frac{2\varrho \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ und $\frac{2\varrho \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ und der Inhalt $\frac{2\varrho^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}^2}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

48. Die Seiten sind $\frac{r \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ u. s. w.

49. $r(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta) = r \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos\delta}$.
(§ 6, Aufg. 13.)

50. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta}$.
(§ 6, Aufg. 14.)

51. $fl = \frac{4\varrho^2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$. **52.** $\frac{r^2}{\varrho^2} = \frac{1+\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha^2 \cdot \sin\beta^2}$; etwa zu erhalten durch Umformung des Ausdrucks für eine Diagonale. **53.** Vergl. Aufg. 52. **54.** Es ist $\alpha+\beta = 180 - \varepsilon$ und $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ aus Aufg. 52 bestimmbar. **55.** Wenn $2s$ der gegebene Umfang und ε der Winkel der Gegenseiten ist, so ergiebt sich (Aufg. 51) $s\varrho = \frac{4 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ und $\alpha+\beta = 180° - \varepsilon$, u. s. w. $\alpha = 140° \, 23'$. **56.** Aus der Beziehung zwischen r, ϱ, α, β in Aufg. 52 ergiebt sich $\beta = 82° \, 47'$. Es muss sein $\varrho^2 < \frac{r^2 \cdot \sin\alpha^2}{1-\sin\alpha}$. **57.** Es ergiebt sich aus der

Gleichung in Aufg. 52, indem man statt $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ bezüglich $\frac{e}{2r}$ und $\frac{f}{2r}$ einführt. **58.** Zu erhalten durch Berechnung des Werthes von ef vermittelst Aufg. 57 durch die Beziehung $fl = \frac{ef \cdot \sin\theta}{2}$. **59.** Aus 57 und 58 leicht zu erhalten.

§ 30.

1. Bezeichnet seien die Seiten $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, die Diagonalen $AC=e$, $BD=f$; die Winkel A, B, C, D bezüglich durch α, β, γ, δ. Gegeben seien a, b, α, β, γ: so sind zu bestimmen e und die Winkel $(e, a)=\beta_1$ und $(e, b)=\alpha_1$, folglich auch $(d, e)=\gamma_1$ und $(c, e)=\delta_1$ und endlich c und d. Es wird

$$c = \frac{e\sin\gamma_1}{\sin\delta} = \frac{a\sin\alpha - b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\delta};$$

$$d = \frac{e\sin\delta_1}{\sin\delta} = \frac{b\sin\gamma - a\sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta},$$

welche Werthe sich auch durch Zerlegung des Vierecks in rechtwinklige Dreiecke herstellen lassen, und

$$2fl = ad\sin\alpha + bc\sin\gamma = \frac{2ab\sin\alpha\sin\gamma - b^2\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma - a^2\sin(\beta+\gamma)\sin\alpha}{\sin\delta}.$$

Numerisch: $e=19{,}81$, $c=23{,}234$, $d=27{,}742$, $fl=316{,}21$.

2. Man hat (Aufg. 1)

$$2fl\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma) = a^2\sin\alpha\sin(\beta+\gamma) + b^2\sin\gamma\sin(\alpha+\beta) - 2ab\sin\alpha\sin\gamma$$

und daraus

$$\sin\beta\left[a^2\operatorname{ctg}\gamma + b^2\operatorname{ctg}\alpha - 2fl\cdot\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\right] + \cos\beta[a^2+b^2-2fl(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)] = 2ab,$$

d. i. für die numerische Berechnung:

$$27{,}67\cdot\cos\beta - 17{,}338\cdot\sin\beta = 24, \quad \text{woraus } \beta = 10^\circ\,37{,}2'.$$

2a. Aus Aufg. 1 ergiebt sich

$$4fl\cdot\sin\delta = [2ab - (a^2+b^2)\cos\beta]\cdot[\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma)]$$
$$- a^2\sin\beta[\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha-\gamma)] - b^2\sin\beta[\sin(\alpha+\gamma) - \sin(\alpha-\gamma)]$$

oder $[2ab-(a^2+b^2)\cos\beta]\cdot\cos(\alpha-\gamma) - (a^2-b^2)\sin\beta\cdot\sin(\alpha-\gamma) =$

$$= 4fl\cdot\sin\delta + 2ab\cos(\beta+\delta) - (a^2+b^2)\cdot\cos\delta.$$

Numerisch: $6{,}5778\cdot\sin(\alpha-\gamma) + 15{,}449\cdot\cos(\alpha-\gamma) = 16{,}589$, woraus $\alpha-\gamma = 14^\circ\,8{,}9'$ d. h. $\alpha = 102^\circ\,4{,}4'$.

3. Gegeben a, b und die Winkel: gesucht f. Es ist

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma = \frac{a^2 \sin\alpha^2 + 2ab \sin\alpha \sin\gamma \cos\delta + b^2 \sin\gamma^2}{\sin\delta^2}.$$

Direkte Herleitung: Man fälle von A aus die Lothe AB_1 auf BC und AD_1 auf DC, so ist AC Durchmesser des dem Dreieck AB_1D_1 umschriebenen Kreises u. s. w. Ferner ist $2fl = ef \cdot \sin\lambda$, wenn λ der Winkel der beiden Diagonalen ist, folglich (vergl. Aufg. 1)

$$\sin\lambda = \frac{2ab \sin\alpha \cdot \sin\gamma - a^2 \sin(\beta+\gamma) \cdot \sin\alpha - b^2 \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin\gamma}{ef \sin\gamma}.$$

4. Gegeben a, c und die Winkel: Es ist

$$b = \frac{a \sin\alpha - c \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad d = \frac{a \sin\beta - c \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)},$$ welche Werthe sich einzeln auch durch Zerlegung des Vierecks in rechtwinklige Dreiecke darstellen lassen, und

$$fl = \Delta\, ABN - \Delta\, CBN = \frac{a^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta - c^2 \cdot \sin\gamma \sin\delta}{2 \sin(\alpha+\beta)}.$$

5. Gegeben die gleichen Gegenseiten a,

$$\text{so wird } b = \frac{2a \cos\frac{\alpha+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\delta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad d = \ldots;$$

$$fl = \frac{a^2 \cdot \sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\gamma+\alpha)}{2 \sin(\alpha+\beta)}.$$

6. Gegeben das Dreieck ABN und zwar $AB = a$, α, β und $ABCD = fl$. Es ergiebt sich (Aufg. 4), indem man

$\sin\gamma \sin\delta = \frac{1}{2}[\cos(\gamma-\delta) - \cos(\gamma+\delta)] = \frac{1}{2}[\cos(\gamma-\delta) - \cos(\alpha+\beta)]$

einführt, $c^2 \cos(\gamma-\delta) = 2a^2 \sin\alpha \sin\beta + c^2 \cos(\alpha+\beta) - 4fl \cdot \sin(\alpha+\beta)$.

7. Gegeben e, f, Winkel $(a, e) = \beta_1$, $(a, f) = \delta_1$, $(c, f) = \beta_2$, $(c, e) = \delta_2$: Man hat $a \cdot \sin(\delta_1 - \beta_2) = e \cdot \sin\delta_2 - f \cdot \sin\beta_2$.

und $c \cdot \sin(\delta_2 - \beta_1) = f \cdot \sin\delta_1 - e \cdot \sin\beta_1$.

8. Gegeben a, b, c, β, γ:

Es ist $d^2 = (a \sin\beta - c \sin\gamma)^2 + (b - a \cos\beta - c \cos\gamma)^2$, d. h.

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma + 2ac \cdot \cos(\beta+\gamma) - 2ab \cdot \cos\beta$; ferner

$d \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta - c \cdot \sin(\beta+\gamma)$; $d \cdot \sin\delta = b \cdot \sin\gamma - a \cdot \sin(\beta+\gamma)$;

woraus $2fl = ab \cdot \sin\beta + cd \cdot \sin\delta = bc \cdot \sin\gamma + ad \cdot \sin\alpha$

$= ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta+\gamma)$.

9. Gegeben a, b, c, α, δ; Man projicire b auf d, so ergiebt sich
$$d = a\cos\alpha + c\cos\delta + b\cos(b, d)$$
$$= a\cos\alpha + c\cos\delta + \sqrt{b^2 - (c\sin\delta - a\sin\alpha)^2}.$$

10. Gegeben a, c, e, $(a, f) = \delta_1$, $(c, f) = \beta_1$: Man projicire e auf f, so ergiebt sich $f = a\cos\delta_1 + c\cos\beta_1 - e\cos(e, f)$
$$= a\cos\delta_1 + c\cos\beta_1 - \sqrt{e^2 - (a\sin\delta_1 + c\sin\beta_1)^2}.$$

11. Gegeben a, b, c, $(a, d) = \alpha$, $(b, c) = \gamma$: es ergiebt sich $d = a\cos\alpha \pm \sqrt{f^2 - (a\sin\alpha)^2}$, wo $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$ u. s. w.

12. Gegeben a, b, c, $(a, d) = \alpha$, $(a, b) = \beta$. Man projicire b auf d, so ergiebt sich $c\sin\delta = a\sin\alpha - b\sin(\alpha + \beta)$ und $d = a\cos\alpha + c\cos\delta - b\cos(\alpha + \beta)$. **13.** Gegeben a, b, c, d, $(a, d) = \alpha$: es ist $2bc\cos\gamma = b^2 + c^2 - f^2$, wo $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$; ferner ist $fl = \frac{a\,d\sin\alpha}{2} + W$, wo
$$16W^2 = 16\Delta^2 - 4a^2d^2\sin\alpha^2 + 4ad(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\cdot\cos\alpha \text{ und}$$
$$16\Delta^2 = -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2.$$

14. Man construire das Parallelogramm $ADCE$ und verbinde B mit E, so sind im Dreieck BAE bekannt a, c und $BAE = \mu$, folglich BE und $\measuredangle\, AEB$ zu bestimmen, also im Dreieck BEC die drei Seiten bekannt und demnach auch $\measuredangle\, BEC$ und $AEC = \delta$ u. s. w. Es ergiebt sich $BE = 2{,}7827$; $AEB = 112° 29'$; $BEC = 119° 38{,}3'$; $\delta = 127° 52{,}7'$; $\alpha = 92° 7{,}3'$. **15.** Man ziehe $DG \parallel$ und $= a$, so dass das Parallelogramm $BDGA$ entsteht, und ziehe GC, so sind im Dreieck CAG bekannt $AC = e$, $AG = f$, $GAC = \lambda$, folglich zu bestimmen CG und $\measuredangle\, AGC$, ferner im Dreieck CDG bekannt die drei Seiten, woraus zu bestimmen DGC u. s. w. Es ergiebt sich $CG = 10{,}44$; $AGC = 24° 30{,}2'$; $CGD = 13° 13'$; $DGA = ABD = 11° 17{,}2'$ u. s. w.

16. Bezeichnet man die Theile des Winkels α durch α_1 und α_2, so ergiebt sich zwischen den drei Winkeln α, α_1, α_2 die Beziehung: $\cos\alpha^2 + \cos\alpha_1{}^2 + \cos\alpha_2{}^2 = 1 + 2\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2$ (§ 37, Aufg. 6) und demnach, durch Anwendung des Cosinussatzes:
$$a^2c^2(a^2 + c^2) + b^2d^2(b^2 + d^2) + e^2f^2(e^2 + f^2)$$
$$+ a^2b^2e^2 + b^2c^2f^2 + c^2d^2e^2 + d^2a^2f^2$$
$$= a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + a^2c^2e^2 + a^2c^2f^2 +$$
$$+ b^2d^2e^2 + b^2d^2f^2 + a^2e^2f^2 + b^2e^2f^2 + c^2e^2f^2 + d^2e^2f^2.$$
Auf der linken Seite dieser Gleichung kommen zunächst die Gegenseitenpaare und die Diagonalen vor, dann alle diejenigen

Combinationen, welche Seiten von Dreiecken sind; auf der rechten Seite dagegen treten alle offenen Verbindungen von drei aufeinander folgenden Linien auf, so dass alle Combinationen von drei in einer Ecke zusammentreffenden Linien ausgeschlossen sind. **17.** Aus der Gleichung in Aufg. 16 ist die quadratische Gleichung, deren Wurzel d^2 ist, leicht herzustellen: numerisch wird dieselbe $9d^4 - 780\,d^2 = 13530$; d. h. $x = 4{,}8972$.
18. Ist d die betreffende Seite und sind Δ und Δ_1 die beiden, je aus einer Diagonale und zwei Seiten gebildeten Dreiecke, so ergiebt sich: $4\,b^2\,d^2 = 16\,(\Delta - \Delta_1)^2 + (e^2 + f^2 - a^2 - c^2)^2$.
19. Es ergiebt sich $\pm 2bd = e^2 + f^2 - a^2 - c^2$. **19a.** $ad = \pm 2(\Delta - \Delta_1)$.
20. $\frac{AA_1^2}{a^2} = \frac{\sin\beta^2}{\sin\alpha^2} - 2\,\frac{\sin\beta\cdot\sin\beta_1}{\sin\alpha\cdot\sin\alpha_1}\cdot\cos(\gamma-\gamma_1) + \frac{\sin{\beta_1}^2}{\sin{\alpha_1}^2}$.

21. Es ist $\frac{BA_0}{CA_0} = \frac{\text{Loth}\,(B, AA_1)}{\text{Loth}\,(C, AA_1)} = \frac{\Delta\,ABA_1}{\Delta\,ACA_1} = \frac{cc_1\cdot\sin(\beta-\beta_1)}{bb_1\cdot\sin(\gamma_1-\gamma)} =$
$= \frac{\sin\gamma\cdot\sin\gamma_1\cdot\sin(\beta-\beta_1)}{\sin\beta\cdot\sin\beta_1\cdot\sin(\gamma_1-\gamma)}$; vorausgesetzt dass die Dreiecke BCA und BCA_1 auf derselben Seite von BC liegen: wenn dagegen diese Dreiecke auf entgegengesetzten Seiten von BC liegen und A_0 zwischen B und C, so ergiebt sich
$BA_0\cdot\sin\beta\cdot\sin\beta_1\cdot\sin(\gamma+\gamma_1) = CA_0\cdot\sin\gamma\cdot\sin\gamma_1\cdot\sin(\beta+\beta_1)$.

22. $\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} = \frac{\sin\gamma_1\cdot\sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta_1\cdot\sin(\gamma+\gamma_1)}$; $\frac{\sin BA_1A}{\sin CA_1A} = \frac{\sin\gamma\ \sin(\beta+\beta_1)}{\sin\beta\cdot\sin(\gamma+\gamma_1)}$, oder wenn man über derselben Basis BC zwei Dreiecke errichtet BCA und BCA_1, deren Spitzen A und A_1 mit einander verbindet und die Winkel A_1AB, A_1BC, A_1CA bezüglich durch α_1, β_1, γ_1, und A_1AC, A_1BA, A_1CB bezüglich durch α_2, β_2, γ_2 bezeichnet, so hat man $\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1 = \sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2$.
(Vergl. § 33, Aufg. 4). **23.** Man hat identisch $\frac{CA_0}{A_1A_0}\cdot\frac{BA_0}{AA_0} = \frac{BA_0}{A_1A_0}\cdot\frac{CA_0}{AA_0}$,
d. h. $\frac{\sin(\gamma_1-\alpha_0)}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin(\beta+\alpha_0)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta_1+\alpha_0)}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin(\gamma-\alpha_0)}{\sin\gamma}$,

folglich wenn man einführt: $\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma_1}{\sin\gamma\cdot\sin\beta_1} = \lambda$ d. i.

$$\frac{\cos(2\alpha_0+\beta-\gamma_1)-\cos(\beta+\gamma_1)}{\cos(2\alpha_0+\beta_1-\gamma)-\cos(\gamma+\beta_1)} = \lambda \text{ und } \frac{\sin(\beta-\gamma_1)-\lambda\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos(\beta-\gamma_1)-\lambda\cos(\beta_1-\gamma)} = \operatorname{tg}\varphi:$$

so ergiebt sich $\frac{\cos(2\alpha_0+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\beta+\gamma_1)-\lambda\cos(\beta_1+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma_1)-\lambda\cos(\beta_1-\gamma)}$.

24. $AB = 1185$ m. **25.** $AB = 781{,}4$ m. **26.** Man bestimme die Winkel $CAD = x$ und $CBD = y$, so hat man $x + y = 360° - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$ und $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi$,

folglich $\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \cdot \sin(\varphi - 45°)}{\sin(\varphi + 45°)}$ u. s. w.

Numerisch: $x = 87° 9'$, $y = 98° 7'$, $AD = 879$ m, $BD = 798$ m, $CD = 1187$ m. **27.** Bei derselben Bezeichnung wie in Aufg. 26 ist $y - x = \gamma_2 - \gamma_1$, wenn $\gamma_2 = 60°$, $\gamma_1 = 45°$ die Theile sind des Winkels γ, ferner $\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{b}{a}$ u. s. w.; $y = 50° 9{,}8'$, $x = 35° 9{,}8'$, $d = 84° 50{,}2'$, $AD = 347{,}82$ m, $BD = 213$ m, $CD = 231{,}3$ m. **28.** Die Relation ergiebt sich, wenn man den Schnittpunkt der beiden Diagonalen durch L bezeichnet, aus der Identität: $\frac{AL \cdot BL \cdot CL \cdot DL}{BL \cdot CL \cdot DL \cdot AL} = 1$ durch wiederholte Anwendung des Sinussatzes. **29.** Entweder: man denke sich über $c_0 = C_0D_0 = 1$ ein ähnliches Viereck $A_0B_0C_0D_0$ construirt und dazu (wie in Aufg. 25) die Gegenseite $a_0 = A_0D_0$ berechnet, so verhält sich schliesslich die gesuchte Seite CD d. i. $c : a = c_0 : a_0$. Oder: man berechne die Winkel $(a, e) = \alpha_2$ und $(a, f) = \beta_1$, vermittelst der Gleichungen $\alpha_2 + \beta_1 = \gamma_2 + \delta_1$ und $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \gamma_1 \cdot \sin \delta_1}{\sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2 \cdot \sin \delta_2}$ (vergl. Aufg. 28) und endlich ergiebt sich durch doppelte Anwendung des Sinussatzes $\frac{d}{a} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \delta_2}$ und $\frac{c}{d} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_2}$, folglich $\frac{c}{a} = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1}{\sin \gamma_2 \cdot \sin \delta_2}$; Numerisch:

$\alpha_2 = 39° 39'$, $\beta_1 = 35° 21'$, $\frac{c}{a} = 0{,}60169$, $c = 71$. (In gleicher Weise wird die Aufgabe behandelt, wenn eine Diagonale und die an der anderen Diagonale liegenden vier Winkel gegeben sind, diese Diagonale zu bestimmen). **30.** (Vergl. Aufg. 26). Es ergiebt sich $\frac{f}{a} = \frac{\sin \alpha}{\sin \delta_2}$ und $\frac{b}{f} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \gamma}$, folglich

$\frac{b}{a} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \delta_1}{\sin \delta_2 \cdot \sin \gamma}$ d. h. $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \delta_2}{\sin \gamma_1 \cdot \sin \delta_1}$, ausserdem ist $\alpha + \beta = 360° - (\beta + \delta)$ u. s. w.

31. Gesetzt $DAB = x$, $DCB = y$, so hat man (vergl. Aufg. 30) $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \delta_2}{\sin \gamma_1 \cdot \sin \delta_1} = \operatorname{tg} \varphi$; $\varphi = 53° 37{,}1'$, $x = \alpha = 87° 23{,}4'$, $y = \gamma = 132° 36{,}6'$, $\frac{e}{f} = \frac{\sin \beta \cdot \sin \delta_2}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma_1} = 0{,}92564$, d. h. $e = 361$.

32. Man hat (Aufg. 30) $\frac{\sin \alpha}{\sin(\gamma_1 + z)} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin u}{\sin \gamma_1 \cdot \sin \delta_1}$ und $z + u = 360° - (\alpha + \beta - \gamma_1 - \delta_1)$, folglich $2 \sin(\gamma_1 + z) \cdot \sin u = \cos(\gamma + z - u) - \cos(\gamma_1 + z + u)$ oder $\cos(\gamma + z - u) - \cos(\alpha + \beta - \delta_1) = \frac{2 \sin \alpha \cdot \sin \gamma_1 \cdot \sin \delta_1}{\sin \alpha_2}$.

33. Wie in Aufg. 32. ergiebt sich ausser $v + w = 360° - (\beta + \delta + \alpha_2 + \gamma_1)$, $\frac{\cos(v - w + \alpha_2) - \cos(\beta + \delta + \gamma_1)}{\cos(v - w - \gamma_1) - \cos(\beta + \delta + \alpha_2)} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$ u. s. w.

34. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen sei L, so ergiebt sich $\frac{DL}{BL} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1}$ und $\alpha_1 + \gamma_2 = 180° - \delta$ u. s. w.

35. Bei gleicher Bezeichnung wie in Aufg 28 ergiebt sich (vergl. Aufg. 30) $\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1}$ und $\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta} = \frac{\sin \delta_2 \cdot \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta}$; ausserdem $\gamma - \gamma_2 = \gamma_1 = 180° - \alpha_2 - \beta$ und $\delta - \delta_1 = \delta_2 = 180° - \alpha - \beta_1$ u. s. w. Es werden: $\gamma_1 = 40°$, $\delta_2 = 30°$, $\lambda = 50°$, $\beta_2 = 10°$, $\alpha_1 = 20°$, und durch trigonometrische Berechnung: $\gamma = 120° 0{,}1'$, $\gamma_2 = 80° 0{,}1'$, $\delta = 79° 59{,}9'$, $\delta_1 = 49° 59{,}9'$.

36. $\frac{AL}{CL} = \frac{\sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1}{\sin \beta_2 \cdot \sin \alpha_2}$, $\frac{BL}{DL} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \delta_2}{\sin \beta_1 \cdot \sin \alpha_1}$.

37. Ist E der Schnittpunkt von AB und CD, F der Schnittpunkt von AD und BC, so hat man: $\frac{BE}{AE} = \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma_2}$, $\frac{CE}{DE} = \frac{\sin \beta \cdot \sin \delta_1}{\sin \gamma \cdot \sin \beta_1}$, $\frac{AF}{DF} = \frac{\sin \gamma_1 \cdot \sin \delta}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \gamma}$, $\frac{BF}{CF} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma_1}{\sin \beta \cdot \sin \alpha_1}$.

Aus den Beziehungen in Aufg. 36 und 37 ergiebt sich:

$$\frac{AL \cdot CF \cdot BE}{CL \cdot BF \cdot AE} = 1 \text{ und } \frac{BL \cdot DE \cdot CF}{DL \cdot CE \cdot BF} = 1.$$

38. Bezeichnet man die Winkel $BEC = \varepsilon_2$, $CEF = \varepsilon_1$, $BFA = \theta_1$, $AFE = \theta_2$, so hat man nach Aufg. 22 für die beiden über EF

errichteten Dreiecke EBF und EDF: $\frac{\sin\varepsilon_1 \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\beta_1}{\sin\varepsilon_2 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\beta_2} = 1$, d. i. $\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\theta_2} = \frac{\sin\varepsilon_2 \cdot \sin\beta_2}{\sin\theta_1 \cdot \sin\beta_1} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ}$, und weil $\varepsilon_1 + \theta_2 = 100^\circ$, so ergiebt sich $\theta_2 = 80^\circ$, $\varepsilon_1 = 20^\circ$, und demnach $\varepsilon = 40^\circ$, $\theta = 100^\circ$, folglich endlich im Dreieck LMN, welches durch die Diagonalen AC d. i. LN, BD d. i. LM und EF d. i. MN gebildet ist, wird Winkel $LMN = \mu = \beta_1 + \varepsilon = 70^\circ$ und Winkel $LNM = \nu = \alpha_2 - \varepsilon = 60^\circ$. Endlich ist noch zu bemerken, dass $\frac{BM}{DM} = \frac{\sin\theta \cdot \sin\delta_2}{\sin\beta_2 \cdot \sin\theta_2}$, $\frac{AN}{CN} = \frac{\sin\theta_2 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\theta'}$, $\frac{EM}{FM} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\theta_2}{\sin\delta_2}$. $\frac{EN}{FN} = \frac{\sin\gamma_2 \cdot \sin\theta}{\sin\varepsilon_1 \cdot \sin\gamma_1}$. **39.** Wenn $a = \lambda x$, $b = \mu x$, $c = \nu x$ eingeführt werden, so ergiebt sich (vergl. Aufg. 8) $2fl = [\mu\nu \cdot \sin\gamma + \lambda\mu \cdot \sin\beta - \lambda\nu \cdot \sin(\alpha + \beta)] \cdot x^2$, d. h. $x = 97$ und demnach $a = 97$, $b = 194$, $c = 291$. **40.** Bezeichnet man die Theile des Winkels δ $BDC = \alpha$, $ADB = \gamma$, so ergiebt sich $\lambda\mu \cdot \sin\gamma + \mu\nu \cdot \sin\alpha = \lambda\nu$, und $\alpha + \gamma = 120^\circ$, folglich $13 \cdot \sin\alpha + 3\sqrt{3} \cdot \cos\alpha = 6$, d. h. $\alpha = 3^\circ\, 34{,}4'$, $\gamma = 116^\circ\, 25{,}6'$. **41.** Bei derselben Bezeichnung wie in Aufg. 40 ergiebt sich $\sqrt{3} \cdot \sin\alpha + 5 \cdot \cos\alpha = 2{,}5$, woraus $\alpha = 80^\circ\, 54{,}8'$, $\gamma = 39^\circ\, 5{,}2'$.

42. Bezeichnung wie in Aufg. 40: Man hat (§ 37, Aufg. 6) $\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 + \cos\delta^2 = 1 + 2\cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \cos\delta$, folglich wenn man einführt $\cos\gamma = \frac{\lambda^2 - \nu^2 + 2\mu\nu \cdot \cos\alpha}{2\lambda\mu}$ und $\cos\delta = \frac{\lambda^2 - \mu^2 + 2\mu\nu\, \cos\alpha}{2\lambda\nu}$, und $2\mu\nu \cdot \cos\alpha$ durch x ersetzt:
$$x^3 - (2\mu^2 + 2\nu^2 - \lambda^2)\, x^2 + (\lambda^4 + 2\mu^4 + 2\nu^4 - 3\lambda^2\mu^2 - 3\lambda^2\nu^2 + \mu^2\nu^2)\, x = (\lambda^2 - \mu^2)^2 \cdot \mu^2 + (\lambda^2 - \nu^2)^2 \cdot \nu^2 - 4\lambda^2\mu^2\nu^2;$$
d. i. für $\lambda : \mu : \nu = 1 : 2 : 3$ die Gleichung $x^3 - 25x^2 + 192x = 468$, von welcher zwei Wurzeln einander gleich sind, nämlich gleich 6. Diesen Wurzeln entspricht die Lösung $\alpha = \delta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. (Die der Annahme $\lambda : \mu : \nu = 3 : 4 : 5$ entsprechende Gleichung $x^3 - 73x^2 + 1136x = 7216$ hat die reelle Wurzel 54,621, welcher eine geometrische Lösung nicht zugehört.) **43.** Gesetzt Winkel $ALB = x$, so ergiebt sich durch Gleichsetzung der Ausdrücke für $\cos\beta$ und $\cos\delta$:
$$(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cdot \cos x) \cdot (\lambda_1^2 + \mu^2 - 2\lambda_1\mu \cdot \cos x) \cdot [\mu^2 - \lambda\lambda_1 - \mu(\lambda - \lambda_1) \cdot \cos x]^2$$
$$= (\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \cdot \cos x) \cdot (\lambda_1^2 + \mu^2 + 2\lambda_1\mu \cdot \cos x) \cdot [\mu^2 - \lambda\lambda_1 + \mu(\lambda - \lambda_1) \cdot \cos x]^2.$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung sind nur dadurch unterschieden, dass $\cos x$ mit entgegengesetzten Zeichen vorkommt: es fallen darum bei der Reduktion die Glieder mit geraden Potenzen von $\cos x$, $\cos x^0$ mit eingeschlossen, fort, während sich die Glieder mit ungeraden Potenzen von $\cos x$ verdoppeln, so dass sich ergiebt, abgesehen vom Faktor 4μ:

$$4\mu^2\lambda\lambda_1(\lambda-\lambda_1)(\mu^2-\lambda\lambda_1)\cdot\cos x^3+\mu^2(\lambda-\lambda_1)^3(\mu^2-\lambda\lambda_1)\cdot\cos x^3$$
$$-(\lambda-\lambda_1)(\mu^2-\lambda\lambda_2)(\lambda^2+\mu^2)(\lambda_1{}^2+\mu^2)\cos x+(\lambda-\lambda_1)(\mu^2-\lambda\lambda_1)^3\cdot\cos x=0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, einmal wenn $\lambda=\lambda_1$ ist, d. h. wenn das Viereck ein Parallelogramm wird, und dann für $\mu^2-\lambda\lambda_1=0$, den Fall eines Vierecks im Kreise, sonst ergiebt sich $\cos x=0$ d. h. $x=90^\circ$. **44.** Durch Gleichsetzung der Werthe von $\cos\beta$ und $\cos\delta$ ergiebt sich hier, wenn man den Winkel ALB durch x bezeichnet, ehe ein Faktor gehoben wird, die cubische Gleichung:

$$8\mu\mu_1(\lambda-\lambda_1)(\mu+\mu_1)(\mu\mu_1-\lambda\lambda_1)(\lambda^2+\lambda_1{}^2)\cdot\cos x^3$$
$$-4(\mu^2-\mu_1{}^2)(\mu^2\mu_1{}^2-\lambda^2\lambda_1{}^2)(\lambda^2-\lambda\lambda_1+\lambda_1{}^2)\cdot\cos x^2$$
$$-2(\lambda-\lambda_1)(\mu+\mu_1)(\mu\mu_1-\lambda\lambda_1)[(\mu^2-\lambda\lambda_1)(\mu_1{}^2-\lambda\lambda_1)+2\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)^2]\cdot\cos x$$
$$+(\mu^2-\mu_1{}^2)(\lambda+\lambda_1)^2(\mu^2\mu_1{}^2-\lambda^2\lambda_1{}^2)=0.$$

Hier hebt sich der Faktor $\mu\mu_1-\lambda\lambda_1$ weg, der gleich Null gesetzt die Bedingung dafür ist, dass das Viereck ein Kreissehnenviereck ist ($\cos\beta+\cos\delta=0$); auch der Faktor $\mu+\mu_1$ lässt sich heben, so dass die Gleichung wird:

$$8\mu\mu_1(\lambda-\lambda_1)(\lambda^2-\lambda_1{}^2)\cdot\cos x^3-4(\mu-\mu_1)(\mu\mu_1+\lambda\lambda_1)(\lambda^2-\lambda\lambda_1+\lambda_1{}^2)\cdot\cos x^2$$
$$-2(\lambda-\lambda_1)[(\mu^2-\lambda\lambda_1)(\mu_1{}^2-\lambda\lambda_1)+2\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)^2]\cdot\cos x$$
$$+(\mu-\mu_1)(\lambda+\lambda_1)^2(\mu\mu_1+\lambda\lambda_1)=0.$$

Die Gleichung wird quadratisch, einmal wenn $\mu=\mu_1$ ist (Aufg. 43), dann auch wenn $\mu\mu+\lambda\lambda_1$ verschwindet, in welchem Falle ebenfalls $\cos x=0$, d. i. $x=90^\circ$ genügt. Für diese Annahme ergiebt sich ausserdem zur Bestimmung des Winkels der beiden Diagonalen:

$$\cos x^2=\frac{(\mu^2-\lambda\lambda_1)(\mu_1{}^2-\lambda\lambda_1)+2\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)^2}{4\mu\mu_1(\lambda^2+\lambda_1{}^2)},\text{ d. h. }\cos 2x=\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2(\lambda^2+\lambda_1{}^2)}.$$

§ 31.

1. $fl=\dfrac{na^2}{2\sin 2\gamma}$, wo $\gamma=\dfrac{180^\circ}{n}$ ist*), $fl=1066{,}2$. **2.** $\dfrac{a\cdot\operatorname{ctg}\gamma}{\sin 2\gamma}$.
3. Gesetzt $a\cdot\operatorname{tg}\gamma=b$, so wird $c_{1,2}=b\cdot\sin\gamma$, $c_{1,3}=b\cdot\sin 2\gamma$, $c_{1,4}=b\cdot\sin 3\gamma$, ... $c_{1,k}=b\cdot\sin(k-1)\gamma$.

---

*) Die Bezeichnung ist hier dieselbe wie in § 16, nämlich $\gamma=\dfrac{180^0}{n}=\dfrac{\pi}{n}$, wo n die Seitenanzahl des regelmässigen Vielecks ist, ferner r als Radius des umschriebenen und ϱ als der des eingeschriebenen Kreises.

4. $20\,r \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ = 15{,}389\,r$.

5. $\gamma = \frac{\pi}{11} = 16^\circ\,21{,}8'$, $s = \frac{11\,r \cdot \sin 5\gamma}{\sin \gamma/2} = 76{,}504 \cdot r$.

6. $s = 2\,r\,(\sin\gamma + \sin 2\gamma + \sin 3\gamma + \ldots + \sin(n-1)\gamma)$, woraus $\sin\gamma/2 \cdot s = 2\,r \cdot \sin\frac{(n-1)\gamma}{2} \cdot \sin\frac{n\gamma}{2}$.

7. $s = 2\,r\,(\cos\gamma + \cos 2\gamma + \cos 3\gamma + \ldots + \cos(n-1)\gamma)$, woraus $\sin\gamma/2 \cdot s = 2\,r \cdot \sin\frac{(n-1)\gamma}{2}\ \cos\frac{n\gamma}{2}$. **8.** Gesetzt $\frac{2\lambda\gamma}{\lambda+\mu} = \alpha$, so wird $s = 2r[\sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+2\gamma) + \ldots + \sin(\alpha+(n-1)\gamma)]$, woraus $\sin\gamma/2 \cdot s = 2\,r \cdot \sin\frac{n\gamma}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\gamma}{2}\right)$. **9.** Es ergiebt sich $l = 2\,r \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)$ oder $l = 2\,r \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\beta-\alpha)$, jenachdem P auf dem kleineren oder grösseren Bogen AB liegt.

10. $s = 2r \cdot \sin\alpha\,[\sin(\gamma-\alpha) + \sin(2\gamma-\alpha) + \ldots + \sin((n-1)\gamma-\alpha)]$, woraus $\sin\gamma/2 \cdot s = 2r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{(n-1)\gamma}{2} \cdot \sin\left(\frac{n\gamma}{2} - \alpha\right)$. **11.** Es ist $\gamma = \pi/5 = 36^\circ$ und $s = 2r(\sin\gamma \cdot \sin 2\gamma + \sin 2\gamma \cdot \sin 3\gamma + \sin 3\gamma \cdot \sin 4\gamma) =$
$= r\,[4\cos\gamma - (\cos\gamma + \cos 3\gamma + \cos 5\gamma + \cos 7\gamma)] =$
$= \frac{r}{2\sin 36^\circ}(4\sin 72^\circ + \sin 18^\circ) = 3{,}4989\,r$.

12. $s = 2r(\sin\gamma \cdot \sin 2\gamma + \sin 2\gamma \cdot \sin 3\gamma + \ldots + \sin(n-2)\gamma \cdot \sin(n-1)\gamma) =$
$= \frac{r}{2\sin\gamma}\,[(n-1)\sin 2\gamma - \sin 2(n-1)\gamma]$.

13. $r\left\{n \cdot \cos\gamma - \frac{\sin n\gamma \cdot \cos(2\alpha + (n-2)\gamma)}{\sin\gamma}\right\}$.

14. $\cos x : \cos y = r : \varrho$ und $\sin x : \sin y = r : 3\varrho$ u. s. w.; $2x = 56^\circ\,15'$, $2y = 116^\circ\,6{,}2'$. **15.** $\cos x : \cos y = r : \varrho$; $\sin x : \sin y = \mu r : (2\lambda + \mu)\,\varrho$ u. s. w. **16.** $\Delta_{2n} = \frac{\Delta_n}{\cos\gamma}$.

17. $\Delta_{kn} = \frac{k \cdot \sin\frac{2\gamma}{k}}{\sin 2\gamma} \cdot \Delta_n$. (Die Grenze von $k \cdot \sin\frac{2\gamma}{k}$ für $k = \infty$ wird $2\gamma = \frac{2\pi}{n}$ d. h. Δ_{kn} alsdann $= \frac{\frac{2\pi}{n} \cdot \Delta_n}{\sin 2\gamma} = r^2\pi$.)

18. $\Delta_{2n} = \frac{\cos \gamma/2^2}{\cos \gamma} \cdot \Delta_n$. 19. $r - \varrho = a/2 \cdot \operatorname{tg} \gamma/2$, $fl = \frac{a^2\pi}{4}$.

20. $2a \cdot \cos \gamma/2^2$. 21. $\frac{a}{2 \cos \gamma/2^2}$. 22. $a_1 = \frac{a \cdot \sin 2\gamma}{\sin \gamma} = 2a \cdot \cos \gamma$,

$a_2 = \frac{a \cdot \sin 3\gamma}{\sin \gamma}$, $a_3 = \frac{a \cdot \sin 4\gamma}{\sin \gamma}$, . . $a_k = \frac{a \cdot \sin (k+1)\gamma}{\sin \gamma}$.

23. $r_1 = \frac{r \cdot \cos 2\gamma}{\cos \gamma}$, $r_2 = \frac{r \cdot \cos 3\gamma}{\cos \gamma}$, . . $r_k = \frac{r \cdot \cos (k+1)\gamma}{\cos \gamma}$.

24. $\varrho = \frac{a}{4 \sin \pi/8} = a/4 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. 25. $a_1 = \frac{a \cdot \cos 2\gamma}{\cos \gamma}$.

26. $a_2 = \frac{a \cdot \cos 3\gamma}{\cos \gamma}$, $a_3 = \frac{a \cdot \cos 4\gamma}{\cos \gamma}$ u. s. w. 27. 4,789.

28. $\Delta_{2,n} = \frac{\cos 2\gamma^2}{\cos \gamma^2} \cdot \Delta_n$. 29. $\varrho_3 = r \cdot \cos 3\gamma$, $\varrho_3{}^2 \pi = 3{,}6467$.

30. $fl = 2r^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin 2\gamma \cdot \sin 3\gamma$.

31. $2r^2 \cdot \sin 2\gamma \cdot \sin 3\gamma \cdot \sin 4\gamma = 1{,}0962\, r^2$, $n = 9$. 32. Es sei $\lambda < \mu$, so ist die dritte Seite eine ν^{te} Diagonale, wo entweder $\nu = n - (\lambda + \mu + 3)$ oder $\nu = \mu - \lambda - 1$ ist, und andererseits ist entweder $n = \lambda + \mu + \nu + 3$ oder unbestimmt $> \mu + 2$.

33. $2r^2 \cdot \sin (\lambda + 1)\gamma \cdot \sin (\mu + 1)\gamma \cdot \sin (\nu + 1)\gamma$.

34. $2r^2 \cdot \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)\gamma \cdot \sin(\lambda_1 + \lambda_3 + 2)\gamma \cdot \sin(\lambda_1 + \lambda_4 + 2)\gamma$.

35. $a_1 = \frac{a \cdot \cos \gamma}{\cos 2\gamma}$. 36. $a_2 = \frac{a \cdot \cos \gamma}{\cos 3\gamma}$. 37. Für ein Sternpolygon der ersten Ordnung von n Seiten, von welchem die Seite gleich a gegeben ist, ergiebt sich die Seite des inneren n-Ecks gleich $a \cdot \operatorname{ctg} 2\gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma$, für ein n-seitiges Sternpolygon der zweiten Ordnung ist dieselbe $a \cdot \operatorname{ctg} 3\gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma$. 38. Die Seite des innersten Polygons ist $a \cdot \operatorname{ctg} (k+1)\gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma$, des Sternpolygons der ersten Ordnung $a \cdot \operatorname{ctg} (k+1)\gamma \cdot \operatorname{tg} 2\gamma$ u. s. w., des Sternpolygons der h^{ten} Ordnung $a \cdot \operatorname{ctg} (k+1)\gamma \cdot \operatorname{tg} h\gamma$. 39. Es ergiebt sich für das Polygon erster Ordnung $a_1 = a \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{tg} 2\gamma$,

" " " zweiter " $a_2 = a \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{tg} 3\gamma$, u. s. w.,

" " " k^{ter} " $a_k = a \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{tg} (k+1)\gamma$.

40. $a_0 = \frac{a \cos \gamma}{\cos (k+1)\gamma}$. 41. Die Schnittpunkte über B hinaus mögen der Reihe nach bezeichnet werden durch B_1, B_2, . . ., die über A hinaus durch A_1, A_2, . . ., so hat man

$BB_1 = \frac{a \cdot \sin 2\gamma}{\sin 4\gamma}$, $B_1B_2 = \frac{a \cdot \sin 2\gamma \cdot \sin 3\gamma \cdot \sin 2\gamma}{\sin \gamma \cdot \sin 4\gamma \cdot \sin 6\gamma}$,

$B_2B_3 = \frac{a \cdot \sin 3\gamma \cdot \sin 4\gamma \cdot \sin 2\gamma}{\sin \gamma \cdot \sin 6\gamma \cdot \sin 8\gamma}$ u. s. w. $AB_1 = \frac{a \cdot \cos\gamma \ \sin 3\gamma}{\sin 4\gamma}$,

$AB_2 = \frac{a \cdot \sin 3\gamma \cdot \sin 4\gamma}{\sin \gamma \cdot \sin 6\gamma}$, $AB_3 = \frac{a \cdot \sin 4\gamma \cdot \sin 5\gamma}{\sin \gamma \cdot \sin 8\gamma}, \ldots$

$BB_2 = \frac{a \ \sin 2\gamma}{2 \sin \gamma \cdot \cos 3\gamma}$, $BB_3 = \frac{a \cdot \sin 3\gamma}{2 \sin \gamma \cdot \cos 4\gamma}$,

$BB_4 = \frac{a \cdot \sin 4\gamma}{2 \sin \gamma \cdot \cos 5\gamma}, \ldots$ $A_1B_1 = a \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \operatorname{tg} 2\gamma$,

$A_2B_2 = a \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \operatorname{tg} 3\gamma$, $A_3B_3 = a \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \operatorname{tg} 4\gamma, \ldots$ (Aufg. 39).

42. $\frac{na^2}{2} \cdot \operatorname{ctg} 2\gamma$. **43.** $\frac{na^2 \cdot \cos 3\gamma}{4 \sin\gamma \cdot \cos 2\gamma}$. **44.** $\frac{na^2 \cdot \cos (k+1)\gamma}{\sin\gamma \cdot \cos k\gamma}$.

45. a. $\frac{na}{\cos\gamma}$. b. $\frac{na}{\cos 2\gamma}$. c. $\frac{na}{\cos k\gamma}$. **46.** $\frac{a \cdot \cos (k+1)\gamma}{2 \sin\gamma \cdot \cos k\gamma}$.

47. Bezeichnet man den Umfang des durch die äusseren Ecken bestimmten Vielecks V durch $2s$, so ist $fl = s \cdot r_1$, oder wenn man den Umfang des durch die inneren Ecken bestimmten regelmässigen Vielecks durch $2s_1$ und den Radius des durch die äusseren Ecken gehenden Kreises durch r bezeichnet, so wird auch $fl = s_1 \cdot r$. **48.** $\frac{a \cdot \operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg} \gamma/_2}$. **49.** Es ergiebt sich $fl = \frac{n \operatorname{ctg}\gamma}{4}\left(a^2 + \frac{2ab}{\cos\gamma} + b^2\right)$, wo γ der halbe Centriwinkel des regelmässigen n-Ecks ist; dieser Ausdruck gestattet auch die Umformung: $fl = A + \frac{2\sqrt{AB}}{\cos\gamma} + B$, wenn A, bezüglich B den Inhalt eines regelmässigen n-Ecks mit den Seiten a, bezüglich b bedeutet. Führt man weiter ein $c^2 = a^2 + 2ab\cos\gamma + b^2$, wo also c eine erste Diagonale des halbregelmässigen $2n$-Ecks ist, so ergiebt sich weiter $r = \frac{c}{2\sin\gamma}$. **50.** $n\,a^2/_4 \cdot \operatorname{ctg}\gamma^2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos\alpha$.

51. Ist der zum Bogen $\frac{AB}{n}$ gehörige Peripheriewinkel gleich γ und sind die Schnittpunkte der Linie AP_{n-1} durch BP_1, BP_2 .. bezeichnet durch C_1, C_2, .., so ergiebt sich $AP_{n-1} = \frac{c \cdot \sin (n-1)\gamma}{\sin n\gamma}$

und $AC_1 = \frac{c \cdot \sin\gamma}{\sin 2\gamma}$, $C_1C_2 = \frac{c \cdot \sin\gamma^2}{\sin 2\gamma \cdot \sin 3\gamma}$, $C_2C_3 = \frac{c \cdot \sin\gamma^2}{\sin 3\gamma \cdot \sin 4\gamma}$, ... $C_{n-2}P_{n-1} = \frac{c \cdot \sin\gamma^2}{\sin(n-1)\gamma \cdot \sin n\gamma}$. **52.** Die Schnittpunkte seien D_1, D_2, ..: man hat $AP_{n-2} = \frac{c \cdot \sin(n-2)\gamma}{\sin n\gamma}$ und $AD_1 = \frac{c \cdot \sin\gamma}{\sin 3\gamma}$, $D_1D_2 = \frac{c \cdot \sin\gamma \cdot \sin 2\gamma}{\sin 3\gamma \cdot \sin 4\gamma}$, $D_2D_3 = \frac{c \cdot \sin\gamma \cdot \sin 2\gamma}{\sin 4\gamma \cdot \sin 5\gamma}$, .. $D_{n-1}P_{n-2} = \frac{c \cdot \sin\gamma \cdot \sin 2\gamma}{\sin n\gamma \cdot \sin(n+1)\gamma}$. **53.** Die Schnittpunkte seien K_1, K_2, . . , so ist $AP_k = \frac{c \cdot \sin k\gamma}{\sin n\gamma}$ und

$$AK_1 = \frac{c \cdot \sin\gamma}{\sin(n-k+1)\gamma},\ K_1K_2 = \frac{c \cdot \sin\gamma \cdot \sin(n-k)\gamma}{\sin(n-k+1)\gamma \cdot \sin(n-k+2)\gamma},$$

$$K_2K_3 = \frac{c \cdot \sin\gamma \cdot \sin(n-k)\gamma}{\sin(n-k+2)\gamma \cdot \sin(n-k+3)\gamma}, \ldots$$

54. $AK_m = \frac{c \cdot \sin m\gamma}{\sin n\gamma}$, $AK_1 = \frac{c \cdot \sin\gamma}{\sin(n-k+1)\gamma}$,

$$K_1K_3 = \frac{c \cdot \sin 2\gamma \cdot \sin(n-k)\gamma}{\sin(n-k+1)\gamma \cdot \sin(n-k+3)\gamma},\ K_3K_6 = \frac{c \cdot \sin 3\gamma \cdot \sin(n-k)\gamma}{\sin(n-k+3)\gamma \cdot \sin(n-k+6)\gamma}.$$

55. An PQ als gemeinschaftlichen Schenkel lege man die Winkel $APQ = \alpha$, $BPQ = \beta$, $CPQ = \gamma$, . . . wo etwa $\alpha < \beta < \gamma < ..$ sein mag und in Q den Winkel φ, auf dessen Schenkel als Schnittpunkte mit AP, BP, CP, . . die Punkte A_1, B_1, C_1, . . gelten sollen, so sind, abgesehen vom Faktor $PQ \cdot \sin\varphi$, QA_1, A_1B_1, B_1C_1, . . die Glieder der Reihe und ihre Summe ist $QD_1 = \frac{PQ \cdot \sin\delta}{\sin(\delta + \varphi)}$, also wenn man auch hier vom Faktor $PQ \cdot \sin\varphi$ absieht, $\frac{\sin\delta}{\sin\varphi \cdot \sin(\delta+\varphi)}$. (Vergl. § 7, Aufg. 34.)

56. $$fl = \frac{2a^2}{\sin\frac{4\alpha}{3}}\left(1 - \cos\frac{2\alpha}{3} \cdot \cos\frac{4\alpha}{3}\right).$$

57. $$fl = \frac{(n-1)a^2 \cdot \sin\frac{2\alpha}{n-2}}{2\sin\frac{(n-1)\alpha^2}{n-2}} - a^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{(n-1)\alpha}{n-2}.$$

§ 32.

1. $\frac{AB}{\sin(AB)} = \frac{PA \cdot PB}{h}$ u. s. w. 2. Zum Beweise sind für AB, AC u. s. w. nur die Ausdrücke aus Aufg. 1 einzusetzen.

3. Es ist

für die Punktepaare A, B und C, D .. $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{\sin(AC)}{\sin(AD)} : \frac{\sin(BC)}{\sin(BD)}$,

" " " A, C und B, D .. $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{\sin(AB)}{\sin(AD)} : \frac{\sin(CB)}{\sin(CD)}$,

" " " A, D und B, C .. $\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{\sin(AB)}{\sin(AC)} : \frac{\sin(DB)}{\sin(DC)}$.

4. $\frac{\sin(AC)}{\sin(AD)} : \frac{\sin(BC)}{\sin(BD)} = \frac{\sin(AC) \cdot \sin(BD)}{\sin(AD) \cdot \sin(BC)} = 1$.

5. Aus der Gleichung (Aufg. 4) $\frac{\sin(AC)}{\sin(AD)} = \frac{\sin(BC)}{\sin(BD)}$ ergiebt sich $\frac{\sin(AC) + \sin(AD)}{\sin(AC) - \sin(AD)} = \frac{\sin(BC) + \sin(BD)}{\sin(BC) - \sin(BD)}$: ist jetzt PH die Halbirungslinie des Winkels APB, so dass sich etwa ergiebt Winkel $(AC) = (AH) - (CH)$, $(BC) = (BH) + (CH)$,
$(AD) = (AH) + (DH)$, $(BD) = (BH) - (DH)$, und führt man statt der Summen und Differenzen der Sinus die Produkte ein, so ergiebt sich, weil $(AH) = (BH)$ ist:
$\operatorname{tg}(AH)^2 = \operatorname{tg}(BH)^2 = \sin(CH) - \sin(DH)$. 6. Weil $AC = BC$ ist, so ergiebt sich (Aufg. 2) $AD : BD = \frac{\sin(AD)}{\sin(BD)} : \frac{\sin(AC)}{\sin(BC)}$.

7. Hier wird die Grenze von $\frac{AD}{BD} = 1$, folglich (Aufg. 2) $AC : BC = \frac{\sin(AC)}{\sin(AD)} : \frac{\sin(BC)}{\sin(BD)}$. 8. Es ist $\frac{\sin(ad)}{\sin(ae)} = \frac{\sin(bd)}{\sin(be)}$; die vier Linien a und b, d und e sind zugeordnet harmonisch.

9. Siehe Aufg. 8. 10. $\frac{\sin(AD)}{\sin(BD)} = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$.

11. Es wird $\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = 1$.

12. $\operatorname{tg}(AC) : \operatorname{tg}(BC) = -\operatorname{tg}(BD) : \operatorname{tg}(AD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

13. Es wird $\operatorname{tg}(AC) = \pm \operatorname{tg}(BC)$ und $\operatorname{tg}(AD) = \mp \operatorname{tg}(BD)$.

14. $x = \frac{b(a+b)}{a-b+2a\cos 2\alpha}$; $\left(x = \frac{a}{\cos 2\alpha}\right)$.

15. $\frac{a}{\cos 2\alpha(2\cos 2\alpha - 1)}$. 16. $\frac{ab(a+b)}{(2a\cos 2\alpha + a - b)\cdot(2a\cos 2\alpha - b)}$.

17. $\frac{CD}{CE} = 2\cos 2\alpha - \lambda$. 18. $x = \frac{2a\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin\alpha\cdot\sin\gamma}$.

19. $x = \frac{b(a+b)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{a\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma) - b\sin\alpha\cdot\sin\gamma}$.

20. Gesetzt: $\frac{4\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)} = \operatorname{ctg} u$, so wird $\operatorname{ctg} x = \frac{\sin(\beta - u)}{\sin\beta\cdot\sin u}$, für $\alpha = \beta$ wird $\operatorname{tg}(x+u) = 2\operatorname{tg}\alpha$. 21. $\frac{a\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\alpha/2}$.

22. $\frac{2a\cdot\sin\gamma/2\cdot\cos(\alpha+\gamma/2)}{\sin\alpha}$. 23. $\cos x/3 = \frac{a+c}{2c}$, $(c > a)$.

24. $2\cos x/3 = \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}$; $\frac{a+b+c}{3} < \frac{ac}{b}$.

25. $\frac{a+x}{a} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}}$. 26. Gesetzt: $\operatorname{tg}\varphi^2 = \frac{4ab\cdot\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{(a-b)^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, so wird $x + a/2 = \frac{a-b}{2\cos\varphi}$.

27. $\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{(a+c)\cdot(b+c)}{ab}}$. 28. Gesetzt: $\frac{(a+c)(b+c)}{ab}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = A$, so wird $\cos(\alpha+\beta+2x) = \cos(\alpha-\beta) - 2A$.

29. $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\gamma_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)\cdot\sin(\beta_1+\gamma_1)}$, und zwei ähnliche Relationen.

30. $\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1+x)\cdot\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\cdot\sin x} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}$, u. s. w.

31. Setzt man $DAE = x$ und $DA_1E = y$, so ergiebt sich $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha_1\cdot\sin\gamma_1}$, und $x + y = 180° - (\alpha+\gamma+\alpha_1+\gamma_1)$.

32. $\frac{AB}{CD} = \frac{\lambda\cdot\sin\alpha(\lambda\sin(\beta+\gamma) - \sin\beta)}{\sin\beta(\sin(\alpha+\gamma) - \lambda\sin\alpha)}$.

33. $\frac{PB}{PC} = x$ ist eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\beta+\gamma) - x(1-\mu) \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \mu \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha+\gamma)$.

34. $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\lambda - 2\operatorname{ctg}(\lambda+\mu)$; $\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\mu - 2\operatorname{ctg}(\lambda+\mu)$; $2\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\lambda - \operatorname{ctg}\mu$: woraus $2\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\gamma$.

35. $\operatorname{ctg}\alpha = \delta\cdot\operatorname{ctg}\lambda - (\delta+1)\cdot\operatorname{ctg}(\lambda+\mu)$, $\delta\cdot\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\mu - (\delta+1)\operatorname{ctg}(\lambda+\mu)$, $(\delta+1)\cdot\operatorname{ctg}\gamma = \delta\cdot\operatorname{ctg}\lambda - \operatorname{ctg}\mu$; woraus zwischen den Winkeln α, β, γ die Beziehung: $\operatorname{ctg}\alpha = (\delta+1)\operatorname{ctg}\beta + \delta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$.

36. $\frac{\sin B}{\sin C} = \sqrt{\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\gamma)}}$; $\frac{\sin A}{\sin D} = \sqrt{\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin(\beta+\gamma)}}$ u. s. w.

37. Es ergiebt sich: $\operatorname{ctg}B^2 + \operatorname{ctg}B[\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(\beta+\gamma) + \lambda(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}(\beta+\gamma)] = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}(\beta+\gamma) - \lambda\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)$, woraus

$$2\operatorname{ctg}B = \frac{-\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin(\beta+\gamma)}\cdot\left\{\frac{\sin(\beta+2\gamma)}{\sin\beta} + \lambda \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 + 4\lambda\cdot\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}\right\}.$$

38. Beweis (nach Steiner). Es ist

$AB + BC = AC$ und $AD = AB + BD$, woraus

durch Multiplication

$$AB\cdot AD + BC\cdot AD = AC\cdot AB + AC\cdot BD,$$

d. h. $AB(AD - AC) + BC\cdot AD = AC\cdot BD$,

weil $AD - AC = CD$, die zu erweisende Relation, vermittelst Aufg. 2.

39. Man hat zu setzen:

$(BD) = \pi/2$, $(AB) = \alpha$, $(BC) = \beta$, bezüglich
$(BD) = \pi/2$, $(AB) = \alpha$, $(CD) = \beta$, bezüglich
$(AD) = \pi/2$, $(AC) = \alpha$, $(AB) = \beta$, bezüglich
$(AD) = \pi/2$, $(AB) = \alpha$, $(CD) = \beta$.

40. Man legt die Winkel α, β, γ oder $\alpha + \pi/2$, $\beta + \pi/2$, $\gamma + \pi/2$ mit gemeinschaftlichem Scheitelpunkt als anstossende Winkel an einander und eine gerade Linie durch ihr System, so folgt die Richtigkeit der Beziehungen unmittelbar aus Aufg. 38.

41. Multiplicirt man die Gleichung in Aufg. 38 mit $4r^2$, so ergiebt sich, weil $2r$ multiplicirt mit dem Sinus eines Peripheriewinkels gleich der gegenüberliegenden Sehne ist:

$$AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD,$$

der Ptolemäische Satz. **42.** Man multiplicirt die Gleichung in Aufg. 38 mit $\frac{1}{4}PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD$ u. s. w. **43.** Die Richtigkeit ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichheit der Sinus der Peripheriewinkel über demselben Bogen. Jedes der drei Doppelverhältnisse (Aufg. 3),

z. B. $\frac{BC}{BD} : \frac{AC}{AD}$, lässt sich nämlich unmittelbar schreiben $\frac{\sin BPC}{\sin BPD} : \frac{\sin APC}{\sin APD} = \frac{\sin BP_1C}{\sin BP_1D} : \frac{\sin AP_1C}{\sin AP_1D}$, wo P und P_1 beliebige Punkte sind der durch A, B, C, D gehenden Peripherie.

§ 33.

1. Man bilde die Verhältnisse der Abschnitte der einzelnen Dreiecksseiten: etwa wie folgt: $BA_1 : AA_1 = \sin BAA_1 : \sin\beta$ und $AA_1 : CA_1 = \sin\gamma : \sin CAA_1$, woraus $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin BAA_1 \cdot \sin\gamma}{\sin CAA_1 \cdot \sin\beta}$ u. s. w.*), so ergiebt sich durch Multiplication die aufgestellte Gleichung. **2.** Es ergiebt sich für die von demselben Eckpunkte ausgehenden Seitenabschnitte $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{\sin C_1}{\sin B_1}$ u. s. w.*)

3. Entweder durch doppelte Anwendung des Satzes I zu erweisen, etwa wie folgt: Man hat

$\varDelta BAA_1$ transv. PCC_1**), folglich $\frac{BC \cdot AC_1 \cdot A_1P}{BC_1 \cdot AP \cdot A_1C} = 1$,

und $\varDelta CAA_1$ transv. PBB_1, folglich $\frac{CB \cdot AB_1 \cdot A_1P}{CB_1 \cdot AP \cdot A_1B} = 1$;

und hieraus durch Division die aufgestellte Gleichung: oder, durch Vermittelung des Satzes in Aufg. 1, darzuthun als Folgerung des Satzes in Aufg. 4. **4.** Es ergiebt sich für die in demselben Eckpunkte gebildeten Winkel: $\frac{\sin PAB}{\sin PAC} = \frac{PB}{PC}$ u. s. w.*)

5. Indirekt zu erweisen. **6.** Sind AA_1, BB_1, CC_1 die Höhen des Dreiecks ABC, so ergiebt sich $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}$ u. s. w.

7. Man bezeichne durch A_1, B_1, C_1 die Schnittpunkte der Halbirungslinien der Innenwinkel, durch A_2, B_2, C_2 die der

---

*) Die weiteren analogen Beziehungen erhält man durch cyklische Permutation der Buchstaben A, B, C.

**) Dreieck und Transversale sind hier, und späterhin in ähnlichen Fällen, so zusammengestellt, dass jeder Eckpunkt des ersteren und der Schnittpunkt der letzteren mit der Gegenseite dieselbe Stelle einnehmen: es liegt P auf AA_1, C auf A_1B, C_1 auf BA.

Halbirungslinien der Aussenwinkel mit den Gegenseiten, so ergiebt sich die Richtigkeit sämmtlicher Behauptungen unmittelbar aus Aufg. 1. **8.** Sind A_1, B_1, C_1 die Berührungspunkte des inneren Berührungskreises, so ergiebt sich $\frac{AB_1}{AC_1} = 1$ u. s. w.; ähnlich die Lösung von Aufg. 8b. **9.** Ist A_0 der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten B, C, und A_1 der Schnittpunkt der Verbindungslinie AA_0 mit der Seite BC, so hat man $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin\gamma^2}{\sin\beta^2}$ u. s. w.; es folgt hieraus ein anderer Beweis des Satzes in Aufg. 9, bezogen auf das eingeschriebene Dreieck. **10.** Liegt P etwa auf dem Bogen AC, so dass Winkel $PAC = \delta$, $PCA = \varepsilon$, also $\delta + \varepsilon = \beta$ ist, so ergiebt sich:

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \pm\frac{\cos\delta}{\cos(\alpha+\delta)},\quad \frac{BC_1}{BA_1} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta},\quad \frac{CA_1}{CB_1} = \mp\frac{\cos(\gamma+\varepsilon)}{\cos\varepsilon},$$

wo die oberen und die unteren Vorzeichen zusammengehören und $\alpha + \delta + \gamma + \varepsilon = 180^\circ$, so dass die Produkte der Wechselabschnitte einander gleich sind. **11.** Ist AB die Hypotenuse und C also der rechte Winkel, so ergiebt sich für die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1: $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\sin\beta^2}{\sin\alpha^2}$, woraus die Richtigkeit des Satzes nach Aufg. 5 folgt.
12. Sind A_1, B_1, C_1 die Schnittpunkte von AG mit BC, BE mit CA und CP mit AB, so ergiebt sich $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BG}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, ebenso $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, folglich nach Satz II (Aufg. 3) $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\sin\beta^2}{\sin\alpha^2}$; nunmehr hat man $\frac{\sin ACP}{\sin BCP} = \frac{AC_1 \cdot \sin\alpha}{BC_1 \cdot \sin\beta}$, folglich $\frac{\sin ACP}{\sin BCP} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. **13.** Ist AB die zu theilende Seite des Dreiecks ABC, so errichtet man über AC und BC die Rhomben $ACDE$ und $BCFG$, in denen ein Winkel der Nebenwinkel von C ist, und verbinde den Schnittpunkt P der Verbindungslinien AG und BE mit C, so theilt PC die Seite AB in dem verlangten Verhältniss (Aufg. 12).
14. Es ist $\frac{\sin PBC}{\sin PBA} = \frac{\sin PCB}{\sin PCA}$. (Folgerung aus Aufg. 3 und 1.)

15. Man hat $EC = \frac{a \cdot \sin PBC}{\sin CEB} = \frac{a \cdot \sin PBC}{\sin PBA}$ und $FB = \frac{a \cdot \sin PCB}{\sin PCA}$.

16. Für EC und FB ergeben sich dieselben Ausdrücke wie in Aufg. 15, folglich wird $\frac{FB}{EC} = \frac{\sin PCB}{\sin PCA} \cdot \frac{\sin PBA}{\sin PBC} = \frac{\lambda}{\mu}$, wo nach Aufg. 3 $\frac{\sin PCB \cdot \sin PBA}{\sin PCA \cdot \sin PBC} = \frac{\sin PAB}{\sin PAC}$ ist. **17.** Unmittelbare Folgerung aus Aufgabe 16. **18.** Man hat, weil Dreieck ABC transv. $A_1B_1C_1$: $\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1} = 1$, und weil AA_1, BB_1, CC_2 durch denselben Punkt gehen: $\frac{AB_1 \cdot BC_2 \cdot CA_1}{AC_2 \cdot BA_1 \cdot CB_1} = 1$, folglich ist $\frac{BC}{AC_1} = \frac{BC_2}{AC_2}$. **19.** Die Punkte seien L, M, N und der zu N conjugirte harmonische Punkt zu bestimmen: Man ziehe durch L und M zwei sich in P durchschneidende gerade Linien, ferner durch N eine Transversale, welche LP in M_1 und MP in L_1 durchschneiden mag, verbinde LL_1 und MM_1 und deren Schnittpunkt P_1 mit P, so wird LMN durch PP_1 in dem zu N conjugirten Punkte N_1 durchschnitten. **20.** Die gegebenen Linien seien PL, PM, PN und der zu PN conjugirte harmonische Strahl zu construiren: man lege durch die gegebenen Linien die Transversale LMN und verfahre wie in Aufg. 19, so ist PP_1 der gesuchte Strahl. **21.** Die Seiten des Vierseits seien ABE, BCF, CDE, DAF und die drei Diagonalen $ACLM$, $BDLN$, $EFMN$, so sind nach dem Satze in Aufg. 18 M und N conjugirt harmonisch in Beziehung auf F und E, weil das Dreieck EAF durchschnitten ist von der Transversale DNB und dann ED, FB und AM durch denselben Punkt C gehen, ebenso sind L und M conjugirt harmonisch in Beziehung auf A und C, weil das Dreieck ABC durchschnitten ist von der Transversale FME und dann EC, FA und BL durch denselben Punkt D gehen: und ebenso ist der Beweis für die Punkte L,N und B,D zu führen. **22.** Man hat nach Satz II, Aufg. 3, wenn A_0 der Schnittpunkt ist der Linien A_1A_2 und BC, B_0 der von BA_1 und CA_2, C_0 der von CA_1 und BA_2, $\frac{BA_0}{CA_0} = \frac{A_2B_0 \cdot BC_0}{CB_0 \cdot A_2C_0}$, und wenn die Winkel an BC in den beiden Dreiecken BCA_1 und BCA_2, welche beide auf derselben Seite von BC liegen mögen, durch β_1, γ_1 und β_2, γ_2 bezeichnet werden,

$$\frac{A_2B_0}{CB_0} = \frac{\sin \gamma_2 \cdot \sin(\beta_2 - \beta_1)}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_1} \text{ und } \frac{A_2C_0}{BC_0} = \frac{\sin \beta_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \gamma_1},$$

woraus $\frac{BA_0}{CA_0} = \frac{\sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 \cdot \sin(\beta_2 - \beta_1)}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}$.

23. Bei ähnlicher Bezeichnung wie in Aufg. 22 ergiebt sich $\frac{\sin\beta_2 \cdot \sin(\beta_3 - \beta_1)}{\sin\beta_3 \cdot \sin(\beta_2 - \beta_1)} = \frac{\sin\gamma_2 \cdot \sin(\gamma_3 - \gamma_1)}{\sin\gamma_3 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1)}$. **24.** Ueber AD sind die drei Dreiecke AED, AD_1D und AGD errichtet, demnach ist nach Aufg. 23 zu beweisen, dass

$$\frac{\sin GAD \cdot \sin EAD_1}{\sin EAD \cdot \sin GAD_1} = \frac{\sin GDA \cdot \sin EDD_1}{\sin EDA \cdot \sin GDD_1}:$$

In der That ist

$$GAD = (CDC_1 =)\, EDD_1 = \gamma \quad \text{und} \quad EAD = GDD_1 (= \alpha + DAD_1).$$
$$EAD_1 = (BAA_1 =)\, GDA = \alpha \qquad\quad GAD_1 = EDA\ (= \gamma + ADD_1).$$

25. Nach Aufg. 21 ist D_0, der Schnittpunkt der Seite ADF mit der Diagonale EGB_1D_1 (Aufg. 24), conjugirt harmonisch*) zu F in Beziehung auf AD, also auf AD bei veränderter Lage der Secante FCB um F ein fester Punkt; ebenso ist die Lage von D_1, als Schnittpunkt der Tangenten in D und A, bestimmt durch die einzige Secante FDA, folglich auch die Linie D_1D_0 ihrer Lage nach vollkommen bestimmt durch die eine Secante FDA, also unabhängig von der Lage der zweiten Secante FCB um F als festen Punkt, welche ebenfalls durch B_1D_1 harmonisch getheilt wird. Anmerkung. Wenn F ausserhalb des Kreises liegt, so ist die Polare zugleich die Berührungssehne. **26.****) Ist von P aus die Tangente zu zeichnen, so zieht man durch P zwei Secanten durch den Kreis PAB und PCD, so schneidet die Verbindungslinie der Schnittpunkte (AD, BC) und (AC, BD) als Polare des Punktes P den Kreis in den Berührungspunkten. **27.****) Ist P der Punkt des Kreises, so zieht man durch P eine beliebige gerade Linie und construirt zu dieser nach Aufg. 29 den Pol, so ist dieser ein Punkt der gesuchten Tangente. **28.****) Construction wie in Aufg. 26. **29.****) Der Pol einer Linie ist der Schnittpunkt der Polaren zweier beliebigen Punkte der Linie. **30.** Es ergiebt sich:

$$AB_2 = \frac{2r \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin(\gamma_1 + \alpha_2)}{\sin(\beta_1 + \gamma_1 + 2\alpha_2)},\quad AC_1 = \frac{2r \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin(\beta_1 + \alpha_2)}{\sin(\beta_1 + \gamma_1 + 2\alpha_2)},$$

---

*) Unmittelbarer Beweis dafür, dass D_0, F conjugirt harmonisch sind zu D, A: Bei gleicher Bezeichnung wie in Aufg. 24 ergiebt sich

$$\frac{AD_0}{DD_0} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin(\gamma + \delta)}{\sin\gamma \cdot \sin(\alpha + \delta)}, \text{ wo } ADD_1 = DAD_1 = \delta \text{ ist; und}$$

$$\frac{AF}{DF} = \frac{AF}{FC} : \frac{DF}{FC} = \frac{\sin ACF}{\sin CAF} : \frac{\sin FCD}{\sin FDC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} : \frac{\sin BCD}{\sin ADC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} : \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

**) Die Construktion ist dieselbe, wenn an Stelle des Kreises ein beliebiger Kegelschnitt tritt.

$$BC_2 = \frac{2r \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_2)}{\sin(\gamma_1 + \alpha_1 + 2\beta_2)}, \quad BA_1 = \frac{2r \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin(\gamma_1 + \beta_2)}{\sin(\gamma_1 + \alpha_1 + 2\beta_2)},$$

$$CA_2 = \frac{2r \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin(\beta_1 - \gamma_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_2)}, \quad CB_1 = \frac{2r \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \gamma_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_2)},$$

$$AC_2 = \frac{2r \cdot \sin(\beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2) \cdot \sin(\gamma_1 + \alpha_2)}{\sin(\beta_1 + \gamma_1 + 2\alpha^2)}, \quad \frac{AB_1}{AC_2} = \frac{\sin(\beta_1 + \alpha_2)}{\sin(\gamma_1 + \alpha_2)},$$

$$BA_2 = \frac{2r \cdot \sin(\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_2) \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_2)}{\sin(\gamma_1 + \alpha_1 + 2\beta_2)}, \quad \frac{BC_1}{BA_2} = \frac{\sin(\gamma_1 + \beta_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)},$$

$$CB_2 = \frac{2r \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_2) \cdot \sin(\beta_1 - \gamma_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_2)}, \quad \frac{CA_1}{CB_2} = \frac{\sin(\alpha_1 - \gamma_2)}{\sin(\beta_1 - \gamma_2)}.$$

Endlich

$$BA_0 \cdot \sin A_0 = BC_1 \cdot \sin(\gamma_1 + \alpha_2), \quad CA_0 \cdot \sin A_0 = CB_2 \cdot \sin(\beta_1 + \alpha_2),$$

$$CB_0 \cdot \sin B_0 = CA_1 \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_2), \quad AB_0 \cdot \sin B_0 = AC_2 \cdot \sin(\gamma_1 + \beta_2),$$

$$AC_0 \cdot \sin C_0 = AB_1 \cdot \sin(\beta_1 - \gamma_2), \quad BC_0 \cdot \sin C_0 = BA_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \gamma_2),$$

woraus $$AB_0 \cdot BC_0 \cdot CA_0 = AC_0 \cdot BA_0 \cdot CB_0.$$

31. Die Seiten des durch die Lothe begrenzten Dreiecks verhalten sich zu den entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks wie $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$ zu dem vierfachen Inhalt des gegebenen Dreiecks. (Es ergiebt sich hieraus, dass das durch die Lothe gebildete Dreieck sich weder in Form noch Grösse verändert, wenn die durch die Fusspunkte der Lothe auf den Seiten gebildeten Abschnitte auf jeder derselben mit einander vertauscht werden.) **32**. Sind die Fusspunkte A_1, B_1, C_1, so hat man $BC_1^2 + CA_1^2 + AB_1^2 = CB_1^2 + AC_1^2 + BA_1^2$: entweder darzustellen als unmittelbare Folgerung zu Aufg. 31, oder durch die Umformung: $PB^2 - PC^2 = c_2^2 - b_1^2$, $PC^2 - PA^2 = a_2^2 - c_1^2$, $PA^2 - PB^2 = b_2^2 - a_1^2$ (vergl. Aufg. 31), wenn P der gemeinschaftliche Punkt der drei Lothe ist. **33**. Folgerung aus 32. **34**. Folgerung aus 32, weil $AB_1 = AC_1$ u. s. w. **35**. Bei derselben Bezeichnung wie in Aufg. 32 ergiebt sich, wenn die Radien der um A, B, C beschriebenen Kreise sind r_1, r_2, r_3

$$BA_1^2 - CA_1^2 = r_2^2 - r_3^2, \quad CB_1^2 - AB_1^2 = r_3^2 - r_1^2,$$

$AC_1^2 - BC_1^2 = r_1^2 - r_2^2$, so dass die Bedingung von Aufg. 32 erfüllt ist. **36**. Sind die Fusspunkte der Lothe bezüglich A_1, B_1, C_1, so hat man $AC_1^2 - BC_1^2 = a_0^2 - b_0^2$, u. s. w. (Durch die Figur ist das Netz eines Tetraeders dargestellt, und der Schnittpunkt der von der gemeinschaftlichen Spitze D der

drei Seitendreiecke auf die Grundkanten des Tetraeders gefällten und weiterhin auf diesen innerhalb der Grundfläche errichteten Lothe der Fusspunkt des von D auf die Grundfläche ABC des Tetraeders gefällten Lothes, d. h. der Fusspunkt der zu D gehörigen Höhe des Tetraeders). **37.** P_0 wird der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Anmerkung. Nimmt man die der Aufg. 37 entsprechende Figur als Netz eines Tetraeders, so durchschneiden sich die vier Höhen desselben in einem und demselben Punkte. **38.** P_0 liegt auf derselben Geraden mit dem Mittelpunkt M_0 des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises und dem Höhenschnittpunkt H_0 dieses Dreiecks und zwar so dass M_0 sich in der Mitte von P_0 und H_0 befindet*). **39.** $\frac{B_0C_0}{a} = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \cdot f$, wo $f = \frac{1 + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$; werden bei der Theilung λ und μ vertauscht, so ändert sich die Grösse des Dreiecks $A_0B_0C_0$ nicht. (Vergl. Aufg. 31). **40.** Nennt man die Eckpunkte des nunmehr durch die Lothe gebildeten Dreiecks $A_0{}^1$, $B_0{}^1$, $C_0{}^1$, so ergiebt sich $B_0C_0 \cdot B_0{}^1C_0{}^1 = f^2 \cdot c^2$, wo f dieselbe Bedeutung hat wie in Aufg. 39.

41. $\lambda = \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha^2} = \frac{bc \cdot \cos\alpha}{a^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2a^2}$ u. s. w.

42. $a = \sin\lambda\,[l \cdot \operatorname{ctg}\lambda + m \cdot \operatorname{ctg}(\lambda - \mu) + n \cdot \operatorname{ctg}(\lambda - \nu)]$ u. s. w. oder wenn gesetzt wird

$$l \cdot \cos(\mu + \nu - \lambda) + m \cdot \cos(\nu + \lambda - \mu) + n \cdot \cos(\lambda + \mu - \nu) = \Sigma$$

$$a = \frac{\Sigma}{\sin(\mu - \lambda) \cdot \sin(\nu - \lambda)},\quad b = \frac{\Sigma}{\sin(\nu - \mu) \cdot \sin(\lambda - \mu)},$$

$$c = \frac{\Sigma}{\sin(\lambda - \nu) \cdot \sin(\mu - \nu)},\quad fl = \frac{\Sigma^2}{2\sin(\mu - \nu) \cdot \sin(\nu - \lambda) \cdot \sin(\lambda - \mu)}.$$

43. Es ist Σ (Aufg. 42) zu ersetzen durch $h_1 \sin\alpha = h_2 \cdot \sin\beta = h_3 \cdot \sin\gamma$, also gleich dem halben Umfange des Fusspunktsdreiecks für das Dreieck ABC. (Vergl. § 27, Aufg. 24). **44.** $\Sigma = 0$ (Aufg. 42).

45. $CA_1 = \frac{b \cdot \sin\alpha_1}{\sin A_1}$ u. s. w., $BA_1 = \frac{c \cdot \sin\alpha_2}{\sin A_1}$ u. s. w.

46. Es ist $\frac{AB_0 \cdot BC_0 \cdot CA_0}{AC_0 \cdot BA_0 \cdot CB_0} = \frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}$.

*) Es folgt daraus der Satz: Wenn die Gegenkanten eines Tetraeders einander gleich sind, so ist der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel zugleich der Mittelpunkt des durch die vier Höhen des Tetraeders bestimmten Hyperboloids.

47. $\left(\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2}\right)^2$. 48. Gesetzt: $\cos A_1\cdot\sin(\beta_1+\gamma_2)+\cos B_1\cdot\sin(\gamma_1+\alpha_2)+\cos C_1\cdot\sin(\alpha_1+\beta_2)=L$, so wird $a_0=\frac{rL}{\sin B_0\cdot\sin C_0}$, $b_0=\frac{rL}{\sin C_0\cdot\sin A_0}$, $c_0=\frac{rL}{\sin A_0\cdot\sin B_0}$.

49. Es ist $L=\frac{\Sigma_0}{r}$, wo Σ_0 der halbe Umfang ist des Fusspunktsdreiecks für $A_0B_0C_0$ und r der Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises. 50. $\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_2}{\sin B_1\cdot\sin C_1}$ u. s. w.

51. $\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1+\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2}{\sin A_1\cdot\sin B_1\cdot\sin C_1}$.

52. $\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1+\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2=0$.

§ 34.

1. $BA_1:CA_1=c\cos\gamma:b\cos\beta=\sin 2\gamma:\sin 2\beta$ u. s. w.

2. $B_1AC_1=\frac{\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\Delta}{\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha-\gamma)}$ u. s. w.

$A_1B_1C_1=\frac{2\Delta}{\cos(\beta-\gamma)\cdot\cos(\gamma-\alpha)\cdot\cos(\alpha-\beta)}$, wo Δ der Inhalt des Dreiecks ABC selbst ist. 3. $\frac{AM}{A_1M}=\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)}$ u. s. w.

4. $AA_1=\frac{c\cdot\sin\beta}{\cos(\beta-\gamma)}=\frac{h_1}{\cos(\beta-\gamma)}$ u. s. w.,

$A_1A_2=\frac{2r\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)}=\frac{A_1H_0}{\cos(\beta-\gamma)}$, wo H_0 der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, u. s. w. Es folgt hieraus die Proportion $\frac{AA_1}{A_1A_2}=\frac{h_1}{A_1H_0}$ *). Ferner ist $A_2B=2r\cdot\cos\gamma=B_2A=CH_0$

*) Es wird durch diese Proportion eine Eigenschaft der Höhen eines Dreiecks bestätigt: nämlich wenn man dieselben über die Gegenseiten verlängert um ihren unteren Abschnitt, so liegen die Endpunkte auf der Peripherie des umschriebenen Kreises: in der That ist eine Höhe AA^1 über BC verlängert, so dass $A^1A^{11}=H_0A^1$, so liegt A^{11} auf dem umschriebenen Kreise und ist demnach Winkel $AA^{11}A_2=\frac{\pi}{2}$, folglich

$$\Delta\, AA^{11}A_2 \backsim AA^1A_1 \text{ und demnach } AA_2:AA_1=AA^{11}:AA^1 \text{ und}$$
$$AA_1:A_1A_2=AA^1:A^1A^{11}=h_1:A^1H_0.$$

u. s. w., d. h. die Verbindungslinien der Endpunkte einer Seite mit den Endpunkten der zugehörigen Durchmesser des umschriebenen Kreises sind gleich dem oberen Abschnitt der Höhe vom dritten Eckpunkt. 5. Die Halbirungslinien seien AA_1, BB_1, CC_1 und N der Mittelpunkt, so ist $AA_1 = \frac{2r \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{h_1}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$ u. s. w. und $\frac{AN}{A_1N} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2}$ u. s. w. 6. $AN_a = 4r \cdot \cos\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2$ u. s. w., $A_1N_a = \frac{4r \cdot \sin\alpha/_2 \cdot \cos\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$, folglich $\frac{AN_a}{A_1N_a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha/_2}$ u. s. w. Es folgt hieraus (vergl. Aufg. 5), dass die Punkte N und N_a conjugirt harmonisch sind in Beziehung auf die Punkte A und A_1. (Vergl. § 32, Aufg. 11). 7. $AA_2 = \frac{2r \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$, $AN_b = 4r \cdot \sin\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2$, $A_2N_b = \frac{4r \cdot \cos\alpha/_2 \cdot \sin\beta/_2 \cdot \cos\gamma/_2}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$, folglich $\frac{AN_b}{A_2N_b} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\alpha/_2}$, $AN_c = 4r \cdot \cos\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2$, $A_2N_c = \frac{4r \cdot \cos\alpha/_2 \cdot \cos\beta/_2 \cdot \sin\gamma/_2}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$, folglich $\frac{AN_c}{A_2N_c} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\alpha/_2}$, also auch hier $\frac{AN_b}{A_2N_b} = \frac{AN_c}{A_2N_c}$. 8. Es ist $NN_a = 4r \cdot \sin\alpha/_2$, $NN_b = 4r \cdot \sin\beta/_2$, $NN_c = 4r \cdot \sin\gamma/_2$; $N_bN_c = 4r \cdot \cos\alpha/_2$, $N_cN_a = 4r \cdot \cos\beta/_2$, $N_aN_b = 4r \cdot \cos\gamma/_2$. **9.** Die Radien aller vier Kreise sind einander gleich, nämlich gleich dem Durchmesser des dem Dreieck ABC selbst umschriebenen Kreises. Zu erhalten aus Aufg. 8 durch den Ausdruck des Radius des umschriebenen Kreises durch Seite und Gegenwinkel. **10.** Nimmt man das Fusspunktsdreieck als Fundamentaldreieck, so werden der Höhenschnittpunkt und die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks nunmehr die Mittelpunkte der vier Berührungskreise.

17*

11. Es ist $A_1B_1C_1 = \frac{2\Delta \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$, wo Δ der Inhalt ist des Dreiecks ABC. **12.** $A_1B_2C_2 = -\frac{2\Delta \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

13. $NBC = \frac{\sin \alpha/_2 \cdot \Delta}{2\cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}$ u. s. w., $N_aBC = \frac{\sin \alpha/_2 \cdot \Delta}{2 \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2}$ u. s. w., $N_aAC = \frac{\cos \beta/_2 \cdot \Delta}{2 \sin \gamma/_2 \cdot \cos \alpha/_2}$ u. s. w., $N_aAB = \frac{\cos \gamma/_2 \cdot \Delta}{2 \sin \beta/_2 \cdot \cos \alpha/_2}$ u. s. w.

14. $NN_bN_c = \frac{\Delta}{2 \sin \alpha/_2 \cdot \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}$ u. s. w.,

$N_aN_bN_c = \frac{\Delta}{2 \sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2}$. **15.** Sind die Berührungspunkte A^1, B^1, C^1, so ergiebt sich $AB^1C^1 = \Delta \cdot \cos \alpha/_2{}^2 \cdot \operatorname{tg} \beta/_2 \cdot \operatorname{tg} \gamma/_2$ u. s. w., $A^1B^1C^1 = 2\Delta \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2$*). **16.** Die Berührungspunkte des Kreises um N_a, d. h. des die Seite a von Aussen berührenden Kreises seien $A_a{}^1$, $B_a{}^1$, $C_a{}^1$, so ergiebt sich:

$$AB_a{}^1C_a{}^1 = \Delta \cdot \cos \alpha/_2{}^2 \cdot \operatorname{ctg} \beta/_2 \cdot \operatorname{ctg} \gamma/_2,$$

$BC_a{}^1A_a{}^1 = \Delta \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2{}^2 \cdot \operatorname{ctg} \gamma/_2$, $CA_a{}^1B_a{}^1 = \Delta \cdot \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2{}^2$,

$$A_a{}^1B_a{}^1C_a{}^1 = 2\Delta \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2 \text{**)}.$$

17. $\varrho = 4r \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2$, $\varrho_a = 4r \cdot \sin \alpha/_2 \cdot \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2$ u. s. w.***). **18.** Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich unmittelbar aus der Beziehung der Tangenten der halben Winkel des Dreiecks § 5, Aufg. 15 durch Multiplication mit s. **19.** Man multiplicire die Gleichung aus Aufg. 18 mit $\frac{\Delta}{2r}$, so ergiebt sich der behauptete Satz unter Berücksichtigung der Anmerkung zu Aufg. 17. **20.** Der zu beweisende Satz ergiebt sich aus der Entwickelung für $\operatorname{tg} \alpha/_2 + \operatorname{tg} \beta/_2 - \operatorname{tg} \gamma/_2$, ähnlich der von § 5, Aufg. 15, durch das gleiche Verfahren wie in Aufg. 18 und 19 und für die Annahme $\gamma = \pi/_2$.

---

*) Folgerung aus Aufg. 14 und 15: $A^1B^1C^1 : \Delta = \Delta : N_aN_bN_c$.

**) Folgerung aus Aufg. 14 und 16: $A_a{}^1B_a{}^1C_a{}^1 : \Delta = \Delta : NN_bN_c$.

***) Folgerung aus Aufg. 15 und 17: $A^1B^1C^1 = \frac{\varrho \cdot \Delta}{2r}$, und

„ „ „ 16 „ 17: $A_a{}^1B_a{}^1C_a{}^1 = \frac{\varrho_a \cdot \Delta}{2r}$.

21. Es ist $r_a = \frac{BN \cdot CN \cdot a}{4\,BCN} = \frac{\varrho}{2 \sin \beta/_2 \cdot \sin \gamma/_2} = \frac{a}{2 \cos \alpha/_2} = 2r \cdot \sin \alpha/_2$, u. s. w. **22.** Ergiebt sich aus der Aufgabe 21. **23.** Folgerung aus den Aufgaben 5 und 21. **24.** $\Delta_a = \cos \alpha^2 \cdot \Delta$; $\Delta_0 = 2\,\Delta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$.*) **25.** $s_0 = \frac{\Delta}{r}$.
26. $\varrho_0 = 2r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$. Folgerung aus Aufg. 26: $\Delta_0 : \Delta = \varrho_0 : r$.
27. Folgerung aus Aufg. 27: $a^2 + b^2 + c^2 + \varrho^2 + \varrho_a{}^2 + \varrho_b{}^2 + \varrho_c{}^2 = 16\,r^2$.
28 und **29**. Zum Theil Anwendung von Formeln aus § 5.
30. Man hat $d^2 = (a/_2 \operatorname{ctg} \alpha - \varrho)^2 + (a/_2 - (s - c))^2$
$= a^2/_4 (\operatorname{ctg} \alpha^2 + 1) - a\varrho \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \varrho^2 - a\,(s - c) + (s - c)^2$
$= \frac{a^2}{4 \sin \alpha^2} - 2\,r\varrho \cdot \cos \alpha + \varrho^2 - (s - b)\,(s - c)$
$= r^2 - 2\,r\varrho + \varrho \left[4r \cdot \sin \alpha/_2{}^2 - \frac{a\varrho}{s - a}\right]$
$= r^2 - 2\,r\varrho + \varrho\,(4r \cdot \sin \alpha/_2{}^2 - a \operatorname{tg} \alpha/_2) = r^2 - 2\,r\varrho$.
31. a. Aehnlich wie Aufg. 30 zu entwickeln. **b.** Kommt zurück auf die Formel $\operatorname{tg} \alpha/_2 + \operatorname{tg} \beta/_2 + \operatorname{tg} \gamma/_2 - \operatorname{tg} \alpha/_2 \cdot \operatorname{tg} \beta/_2 \cdot \operatorname{tg} \gamma/_2 = \frac{1}{\cos \alpha/_2 \cdot \cos \beta/_2 \cdot \cos \gamma/_2}$ (§ 5, Aufg. 15). **32. a.** $H_0N^2 = (2r \cos \beta \cdot \cos \gamma - 4\,r \sin \alpha/_2 \sin \beta/_2 \sin \gamma/_2)^2$
$+ (2\,r \cos \beta \cdot \sin \gamma - 4\,r \sin \alpha/_2 \cos \beta/_2 \sin \gamma/_2)^2$
$= 4r^2 \cos \beta^2 - 16\,r^2 \sin \alpha/_2 \cos \beta \sin \gamma/_2 \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + 16\,r^2 \cdot \sin \alpha/_2{}^2 \cdot \sin \gamma/_2{}^2$
$= 4r^2 [\cos \beta^2 - 4 \sin \alpha/_2 \cos \beta \sin \gamma/_2 \cdot \cos \alpha/_2 \cos \gamma/_2 + 4 \sin \alpha/_2{}^2 \cdot \sin \gamma/_2{}^2 (1 - \cos \beta)]$
$= 4r^2 [\cos \beta^2 - \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma + 8 \sin \alpha/_2{}^2 \cdot \sin \beta/_2{}^2 \cdot \sin \gamma/_2{}^2]$
$= 4r^2 (8 \sin \alpha/_2{}^2 \cdot \sin \beta/_2{}^2 \cdot \sin \gamma/_2{}^2 - \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma) = 2\,\varrho^2 - 2\,r\varrho_0$.
(Vergl. Aufg. 26). **b.** Auf ähnliche Weise zu entwickeln.
33. Folgt unmittelbar aus dem Ausdruck für einen der oberen Höhenabschnitte des Dreiecks, z. B. der Höhe h_a, $AH_0 = 2\,r \cos \alpha$, d. h. gleich der doppelten Ordinate des Punktes M über der Seite a, $= 2\,MA_0$, und weil ebenso $AM_0 = 2\,A_0M_0$, so ist Dreieck $AH_0M_0 \sim A_0MM_0$ u. s. w. **34.** Im $\Delta\ MM_0N$ ist $M_0N^2 = MN^2 + 1/_9\,MH_0{}^2 - 2/_3\,MN \cdot MH_0 \cdot \cos M$, oder wenn man kurz $MN = h_0$, $MH_0 = n$, $NH_0 = m$ setzt: $M_0N^2 = h_0{}^2 + 1/_9\,n^2 - 2/_3\,h_0 \cdot n \cdot \cos M$, und im $\Delta\ MH_0N$ ergiebt sich $2\,h_0 n \cdot \cos M = h_0{}^2 + n^2 - m^2$, so dass $M_0N^2 = 1/_9 (6\,h_0{}^2 + 3\,m^2 - 2\,n^2)$,

*) Zur Vermittelung der Ausdrücke für die verschiedenen Dreiecke kann auch die Gleichung dienen:
$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$ (§ 5, Aufg. 32).

wo noch für h_0^2, m^2, n^2 die Werthe aus Aufg. 30 und 32 einzusetzen sind. **35.** Sind AA_0, BB_0, CC_0 die drei Mittellinien und die Winkel im Cyklus AA_0B, BB_0C, CC_0A bezüglich durch α_0, β_0, γ_0 bezeichnet, so ergiebt sich $\operatorname{ctg}\alpha_0 + \operatorname{ctg}\beta_0 + \operatorname{ctg}\gamma_0 = 0$, es ist nämlich $\operatorname{ctg}\alpha_0 = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{2\sin\beta\cdot\sin\gamma}$ u. s. w., woraus sofort die Richtigkeit folgt vermittelst der Beziehung in § 4, Aufg. 49. **36.** Es ergiebt sich, wenn man dieselbe Bezeichnung wie in Aufg. 35, anwendet: $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin(\alpha_0 - \beta)\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha_0 + \gamma)\cdot\sin\beta} = \frac{\mu}{\nu}$ und demnach: $(\mu + \nu)\operatorname{ctg}\alpha_0 = \nu\cdot\operatorname{ctg}\beta - \mu\cdot\operatorname{ctg}\gamma$, und ähnliche Ausdrücke für $(\nu + \lambda)\cdot\operatorname{ctg}\beta_0$ und $(\lambda + \mu)\cdot\operatorname{ctg}\gamma_0$, folglich durch Addition $(\mu + \nu)\operatorname{ctg}\alpha_0 + (\nu + \lambda)\cdot\operatorname{ctg}\beta_0 + (\lambda + \mu)\cdot\operatorname{ctg}\gamma_0 = 0$, vergl. Aufg. 35. **37.** Wenn man $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} : \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta} : \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma} = \lambda : \mu : \nu$ setzt, so ergiebt sich $AB_1C_1 : \Delta = \lambda^2 : (\lambda + \mu)(\lambda + \nu)$ u. s. w. und $\frac{A_1B_1C_1}{\Delta} = \frac{2\lambda\mu\nu}{(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)}$, sind der Reihe nach α_2 und α_3, β_2 und β_3, γ_2 und γ_3 selbst cyklisch die Theile der Winkel α, β, γ, so dass $\delta\sin\alpha_2 = \sin\beta_1$, $\delta_1\sin\beta_2 = \sin\gamma_1$, $\delta_2\sin\gamma_2 = \sin\alpha_1$,
und $\delta\sin\alpha_3 = \sin\gamma_1$, $\delta_1\sin\beta_3 = \sin\alpha_1$, $\delta_2\sin\gamma_3 = \sin\beta_1$,
so wird

$$\frac{A_1B_1C_1}{\Delta} = \frac{2\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\delta\delta_1\delta_2(\sin\alpha_2\sin\gamma+\sin\alpha_3\sin\beta)\cdot(\sin\beta_2\sin\alpha+\sin\beta_3\sin\gamma)\cdot(\sin\gamma_2\sin\beta+\sin\gamma_3\sin\alpha)}$$

oder nach Reduction des Nenners:

$$\frac{A_1B_1C_1}{\Delta} = \frac{2\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2}{\sin(\beta + \alpha_2)\cdot\sin(\gamma + \beta_2)\cdot\sin(\alpha + \gamma_2)}$$
$$\left(= \frac{2\sin\alpha_3\sin\beta_3\sin\gamma_3}{\sin(\gamma + \alpha_3)\cdot\sin(\alpha + \beta_3)\cdot\sin(\beta + \gamma_3)}\right).$$

38. Sind A_2 und A_3 Punkte der Seite BC, für welche $A_2A_0 = \lambda\cdot A_3A_0$ ist, wo λ positiv oder negativ ist, jenachdem A_2 und A_3 auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von A_0, dem Mittelpunkte von BC liegen, so ist

$$BA_2 - CA_2 = [BA_0 + A_0A_2 - CA_0 + A_0A_2 = 2A_0A_2 = 2\lambda\cdot A_0A_3] = \lambda(BA_3 - CA_3).$$

Diese Beziehung also findet im Besonderen statt, wenn A_2 und A_3 bezüglich die Fusspunkte der von A_1 und A auf BC gefällten Lothe sind, weil

$$A_2A_0 : A_3A_0 = A_1A_0 : AA_0 = \lambda$$

ist; multiplicirt man auf beiden Seiten der gefundenen Gleichung mit $a = BA_2 + CA_2 = BA_3 + CA_3$, so ergiebt sich

$$BA_2^2 - CA_2^2 = \lambda (BA_3^2 - CA_3^2) = \lambda (c^2 - b^2),$$

ebenso $CB_2^2 - AB_2^2 = \lambda (a^2 - c^2)$,

und $AC_2^2 - BC_2^2 = \lambda (b^2 - a^2)$,

folglich durch Addition

$$BA_2^2 - CA_2^2 + CB_2^2 - AB_2^2 + AC_2^2 - BC_2^2 = 0,$$

nach § 33, Aufg. 32 die Bedingung, dass die drei Lothe A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch denselben Punkt P gehen. (Für $\lambda = 1$ ist P_1 der Schnittpunkt der drei Höhen, für $\lambda = \frac{1}{3}$ der Schwerpunkt, für $\lambda = 0$ der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises). **39.** Vorausgesetzt ist, dass $BA_0^2 - CA_0^2 + CB_0^2 - AB_0^2 + AC_0^2 - BC_0^2 = 0$. Bei gleicher Bezeichnung wie in Aufg. 38 ergiebt sich hier, wo A_0 als ein beliebiger Punkt auf BC in Betracht zu ziehen ist,

$$BA_2 - CA_2 = BA_0 - CA_0 + 2A_0A_2 = BA_0 - CA_0 + 2\lambda \cdot A_0A_3 = (1 - \lambda)(BA_0 - CA_0) + \lambda (BA_3 - CA_3)$$

folglich bei einem Verfahren wie in Aufg. 38:

$$BA_2^2 - CA_2^2 = (1 - \lambda)(BA_0^2 - CA_0^2) + \lambda (BA_3^2 - CA_3^2)$$
$$= (1 - \lambda)(BA_0^2 - CA_0^2) + \lambda (c^2 - b^2)$$

und so, wie in Aufgabe 38, durch cyklische Permutation zwei fernere Gleichungen, welche zur ersten addirt, vermöge der Voraussetzung, die Summe Null ergeben, woraus derselbe Schluss wie in Aufg. 38 zu ziehen ist. **40.** Die beiden gegebenen Linien A_1A_2 und B_1B_2 mögen sich unter dem Winkel γ in O schneiden, und es seien die Punkte A_1 und A_2, B_1 und B_2 durch ihre Entfernungen von O bestimmt, nämlich a_1 und a_2, b_1 und b_2, so sind die Punkte A_k und B_k bezüglich bestimmt durch die Längen $OA_k = a_k = a_1 + \lambda (a_2 - a_1)$ und $OB_k = b_k = b_1 + \lambda (b_2 - b_1)$; nunmehr haben die Schnittpunkte P_1, P_2, P_k der in A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_k und B_k errichteten Lothe bezüglich von der Linie A_1A_2 die Entfernung:

$$P_1A_1 = l_1 = b_1 \sin\gamma + (b_1 \cos\gamma_1 - a_1) \operatorname{ctg}\gamma = \frac{b_1 - a_1 \cos\gamma}{\sin\gamma},$$

$$P_2A_2 = l_2 = \frac{b_2 - a_2 \cos\gamma}{\sin\gamma}, \quad P_kA_k = l_k = \frac{b_k - a_k \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Wird jetzt der Winkel der Linie P_1P_k mit AO durch φ bezeichnet, so hat man $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{l_1 - l_k}{a_k - a_1} = \dfrac{(a_2 - a_1)\cos\gamma - (b_2 - b_1)}{a_2 - a_1}$, welcher Ausdruck unabhängig ist von λ, dem Faktor, durch

welchen die Lage des Punktes P_k bestimmt wird, woraus sich ergiebt, dass dieser Punkt auf einer bestimmten durch P_1 gehenden Linie liegt. Auf dieser Linie befindet sich auch der Punkt P_2, mit welchem Punkte P_k zusammenfällt für $\lambda = 1$. (Ganz analog lässt sich der Beweis führen, wenn an Stelle der in den Punkten A und B errichteten Lothe Systeme von parallelen Linien treten).
41. Eine unmittelbare Folgerung des Satzes in Aufg. 40, weil $\frac{A_0A_1}{AA^0_3} = \frac{B_0B_1}{B_0B_3} = \frac{C_0C_1}{C_0C_3} = \lambda$ ist; zugleich ergiebt sich $\frac{P_0P_1}{P_0H_0} = \lambda$.

Cap. III.

§ 35.

1. Dasjenige, in welchem die gegebenen Seiten einen rechten Winkel bilden. **2.** Der Rhombus. **3.** Dasjenige mit rechtwinkligen Diagonalen. **4.** Es ist $\sin x + \cos x = \pm\sqrt{1 + \sin 2x}$, also ein Maximum $(\sqrt{2})$ für $x = 45°$, ein (positives) Minimum (0) für $x = 135°$, ein negatives Maximum für $x = 225°$ u. s. w. **5.** Das halbe Quadrat. **6.** Das Quadrat. **7.** Für $x = 45°$. **8.** Das halbe Quadrat. **9.** Es ist $fl = a^2\left(1 - \frac{1}{2\sin\alpha^2}\right)$, wenn α der Winkel ist, den die gleichen Seiten mit den Gegenseiten des Quadrates bilden: das Maximum entspricht dem Werthe $\alpha = 90°$, in welchem Falle das Dreieck das halbe Quadrat wird. **10.** Man setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält der Ausdruck die Form $\frac{a\cdot\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$ und wird ein Maximum für $x + \varphi = 90°$, d. i. $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$; dasselbe ergiebt sich aus der Darstellung
$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2 - (a\cos x - b\sin x)^2}$; der Maximalwerth ist $\sqrt{a^2 + b^2}$. **11.** Die gesuchte Linie ist, wenn sie das Dreieck nicht durchschneiden soll, parallel zur Hypotenuse, und wenn sie innerhalb des Dreiecks zu ziehen ist, die Mittellinie des Dreiecks, d. i. der Durchmesser des umschriebenen Kreises.

12. Die gesuchte Linie ist parallel der Gegenseite oder die Mittellinie zu dieser hin; der Maximalwerth bezüglich eine der beiden Diagonalen des zu einem Parallelogramm vervollständigten Dreiecks. **13.** Es ist $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{a \operatorname{tg} x} - \sqrt{b \operatorname{ctg} x}\right)^2$, also ein Minimum für $a \operatorname{tg} x = b \operatorname{ctg} x$, d. h. für $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, und zwar alsdann gleich $2\sqrt{ab}$. **14.** Das Rechteck sei $ABCD$, wo $AB = a$, $AD = b$ gegeben sind, die gesuchte Linie AEF, so dass $DE + BF$ möglichst klein wird: bezeichnet man Winkel FAB durch x, so wird für das Minimum $BF = DE = \sqrt{ab}$ und $\operatorname{tg} x = \frac{FB}{AB} = \sqrt{\frac{b}{a}}$. **15.** Wie Aufg. 13 zu behandeln; das Minimum $(2\sqrt{ab})$ tritt ein für den Werth $\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{\frac{b}{a}}$. **16.** Wie Aufg. 14. **17.** Der Ausdruck gestattet die Form $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$, ist also ein Maximum $(+1)$ für $x = 180°$, ein Minimum (-1) für $x = 90°$. **18.** Der Ausdruck gestattet die Form: $\sqrt{1 + \sin 2x} + a^2 \sin 2x$, ist also möglichst gross für $x = 45°$. **19.** Das Dreieck ist zugleich gleichschenklig. **20.** $2 \sin \alpha/_2 \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ ist möglichst gross für $x = y$. **21.** Die Summe wird $2r(\cos x + \cos y) = 4r \cos \alpha/_2 \cdot \cos \frac{x-y}{2}$, also ein Maximum für $x = y$. **22.** Es wird $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos (x - y)}$, ein Minimum für $x = y$. **23.** $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} \alpha}$. Vergl. Aufg. 22. **24.** Die beiden anderen Winkel des Dreiecks müssen einander gleich sein. **25.** Das Dreieck ist gleichseitig. **26.** Das Dreieck muss gleichschenklig sein in Beziehung auf jede Seite als Grundlinie, d. h. gleichseitig. **27.** Ist r der Radius des Kreises, α der Winkel beider Tangenten, ABC das Dreieck, so ist $2fl = r^2(2 \operatorname{ctg} \alpha/_2 + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)$, also wenn man zunächst α als gegeben annimmt, ein Minimum, wenn $\beta = \gamma = 90° - \alpha/_2$ ist; für diese Annahme wird nunmehr $fl = \frac{2r^2}{\sin \alpha}$ d. h. ein Minimum für $\alpha = 90°$, das kleinste Dreieck also ein halbes Quadrat mit dem Inhalt $2r^2$. **28.** Der Ausdruck

gestattet die Form $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + \alpha^2 \cdot \sin 2x$, wird folglich nach Aufg. 10 ein Maximum für $\operatorname{tg} 2x = 2\alpha^2$. **29.** Es wird $fl = d^2/_2 (\sin x + \cos x/_2{}^2)$ ein Maximum für $x = 63^\circ\, 26{,}1'$.
30. Es ist $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} = \left(\sqrt{\frac{1}{\sin x}} - \sqrt{\frac{1}{\sin y}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{\sin x \cdot \sin y}}$,
also ein Minimum für $x = y = \alpha/_2$ und zwar alsdann gleich $\frac{2}{\sin \alpha/_2}$.
31. Ist ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises, so wird $fl = 2\varrho^2\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}\right)$, wenn x und y zwei Winkel des Vierecks und $x + y = 180^\circ$, ein Maximum für $x = y = 90^\circ$, d. h. wenn das Viereck ein Quadrat ist. **32.** Es ist (§ 29, Aufg. 51)

$$fl = 4\varrho^2 \cdot \frac{\sin\frac{\alpha + x}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - x}{2}}{\sin\alpha \cdot \sin x},$$ wenn x ein zweiter Winkel des Vierecks, $= 2\varrho^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin x}\right)$, ein Minimum für $x = 90^\circ$.
33. Auch hier müssen die beiden anderen Winkel rechte sein.
34. Es wird (vergl. § 29, Aufg. 30)

$$fl = \varrho^2 (\operatorname{ctg} \alpha/_2 + \operatorname{ctg} \beta/_2 + \operatorname{ctg} x/_2 + \operatorname{ctg} y/_2),$$

wo $\frac{x + y}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, ein Minimum für $x = y = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$.
35. Ist der Umfang gleich $2s$, so wird $fl = s \cdot \varrho$ und $s = \varrho (\operatorname{tg} \alpha/_2 + \operatorname{ctg} \alpha/_2 + \operatorname{tg} x/_2 + \operatorname{ctg} x/_2)$ ein Minimum für $\operatorname{tg} x/_2 = 1$, d. h. wenn zwei Winkel des Vierecks rechte sind. **36.** Wenn sich dem Viereck ein Kreis umschreiben lässt; denn sind die Seiten a, b, c, d und die von a und b, bezüglich von c und d eingeschlossenen Winkel x und y, so ist $2fl = ab \cdot \sin x + cd \cdot \sin y$, ausserdem hat man $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos y$, d. h. $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} = ab \cdot \cos x - cd \cdot \cos y = k^2$, quadrirt und addirt: $4fl^2 = k^4 = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd \cdot \cos(x + y)$, ein Maximum für $x = 180^\circ$: alsdann ergiebt sich

$4fl^2 = (ab - cd)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2$ u. s. w. **37.** Es ist $fl = r^2/_2 (\sin 2\beta + \sin 2\gamma + 2\sin 2\delta)$, wenn β und γ die zu den parallelen, δ die zu den nicht parallelen Seiten gehörigen Peripheriewinkel sind, und es ist $\beta + \delta = 90^\circ + \alpha$ und $\gamma + \delta = 90^\circ - \alpha$; d. h. es wird $fl = 2r^2 \sin 2\delta \cdot \cos \alpha^2$, ein

Maximum ($=2r^2 \cdot \cos\alpha^2$) für $\delta=45^\circ$. Die nicht parallelen Seiten sind demnach gleich der Seite des eingeschriebenen Quadrates.

38. Es ist der halbe Umfang $s = 2r \cdot \frac{\sin(\delta+\varphi)}{\cos\varphi}$, wo $\operatorname{tg}\varphi = \cos\alpha$, ein Maximum für $\delta+\varphi=90^\circ$ und alsdann $=2r\cdot\sqrt{1+\cos\alpha^2}$. **39.** Der Inhalt des Rechtecks lässt sich auf die Form bringen $\frac{r^2}{2\sin\alpha}[\cos(\alpha-2x)-\cos\alpha]$, wird also ein Maximum für $x_0=\alpha/2$ und alsdann $=r^2/2 \operatorname{tg}\alpha/2$. **40.** Der halbe Umfang $s=\frac{r}{\sin\alpha}\left[\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)\sin x+\sin\alpha^2\cdot\cos x\right]$ wird ein Maximum für $\operatorname{tg}x_0=\frac{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha^2}$ und alsdann $=\frac{r}{\sin\alpha^2}\cdot\sqrt{1-\sin 2\alpha+\sin\alpha^2}$. Zur Darstellung dieses Werthes führt der Ausdruck $\operatorname{tg}(\alpha-x_0)=1-\operatorname{ctg}\alpha$, wenn man also auf AB den senkrechten Radius AE errichtet, so ist für den Maximalwerth des Umfanges die Länge der in C an den Kreis gelegten Tangente zwischen AE und AP gleich r. Die Construktion ist dadurch gegeben. **41.** Bei derselben Bezeichnung wie in Aufg. 39 ergiebt sich für $x_0=\alpha/4$ das Maximum des Inhalts $=r^2\cdot\operatorname{tg}\alpha/4$, was sich auch als unmittelbare Folgerung von Aufg. 39 darstellen lässt. **42.** Der halbe Umfang wird $s=\frac{r}{\sin\alpha/2}[(1-\sin\alpha)\sin x+2\sin\alpha/2^2\cdot\cos x]$, also ein Maximum für $\operatorname{tg}x_0=\frac{1-\sin\alpha}{2\sin\alpha/2^2}$ und alsdann$=\frac{r}{\sin\alpha/2}\sqrt{1-2\sin\alpha+4\sin\alpha/2^2}$; Zur Construktion stelle man dar $\operatorname{tg}(\alpha/2-x_0)=2-\operatorname{ctg}\alpha/2$, d. h. man halbire den Winkel BAC durch AD, ergänze BAD zum Quadranten BAE und construire in D die Tangente von der Länge $2r$ zwischen AP und AE. **43.** Es sei Winkel $CB_1A_1=y$, $BC_1A_1=z$, so ist $y+z=180^\circ-(\beta+\gamma+\alpha_1)=\delta=\alpha+\alpha_1$ und $\Delta=\frac{b_1c_1\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha_1}{2}\cdot\frac{1}{\sin y\sin z}$ ein Minimum für $y=z=\delta/2=\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, woraus die Construktion sehr einfach.

44. Man nehme den Winkel $APB=\delta$ als gefunden an und berechne die Entfernung x des Punktes P von C, dem Schnittpunkte der gegebenen Linien, aus $CA=a$ und $CB=b$, und treffe dann die Bestimmung, dass die Wurzeln der sich ergebenden

quadratischen Gleichung einander gleich werden. **45.** Allgemeinere Methode der Bestimmung eines Werthes der Unbekannten x_0, für welchen ein Ausdruck $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird: man suche zunächst diejenige zwischen zwei Werthen der Unbekannten x, etwa x_1 und x_2, bestehende Beziehung, für welche $f(x_1)$ und $f(x_2)$ einander gleich sind, und setze dann $x_1 = x_2 = x_0$. Hier ergiebt sich:

$$a(\sin x_1 - \sin x_2) + b \cdot (\sin 2x_1 - \sin 2x_2) = 0$$

oder $a \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} + 2b \cdot \cos(x_1 + x_2) \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2} = 0$,

d. h. wenn man $x_1 = x_2 = x_0$ setzt: $a \cos x_0 + 2b \cos 2x_0 = 0$, woraus x_0 zu bestimmen ist. **46.** Bezeichnet man durch x den Winkel, welchen die Diagonale mit einer Rechtecksseite bildet, so ergiebt sich $fl = r^2(\sin 2x + 2 \sin x)$, folglich für den Maximalwerth (Aufg. 45) $\cos 2x_0 + \cos x_0 = 0$, d. i. $x_0 = 60°$, das Sechseck ist also regelmässig. **47.** Der Ausdruck gestattet die Umformung in $\frac{\operatorname{ctg} x/2}{\cos x} = \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\cos x \sqrt{1 - \cos x}}$, wird also ein Minimum für den Winkel x_0, der bestimmt ist durch die Gleichung $\cos x_0^2 + \cos x_0 = 1$, d. h. $x_0 = 51° 45{,}6'$. **48.** Dasjenige, für welches die halbe Basis gleich ist dem grösseren Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt getheilten Schenkel. **49.** Es ist $fl = 2a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos \alpha/2^2 = a^2(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$, also ein Maximum (Aufg. 45), wenn $\cos\alpha_0 + \cos 2\alpha_0 = 0$ ist, d. h. für $\alpha_0 = 60°$, also wenn das Trapez ein halbes regelmässiges Sechseck ist. **50.** Ist x der Winkel, welchen die Seiten b mit der zweiten parallelen Seite bilden, so ist $fl = b(a \sin x + b/2 \sin 2u)$, folglich für das Maximum (Aufg. 45) $a \cos x_0 + b \cos 2u_0 = 0$, woraus sich die grössere der parallelen Seiten als ein Durchmesser des dem Trapez umschriebenen Kreises ergiebt. **51.** Nach der in Aufg. 45 dargestellten Methode, wenn $\cos\alpha_0 = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ist; oder auch: der Ausdruck gestattet die Umformung

$$\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2 + \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos x}{\sin x}\right)^2},$$

wird also ein Minimum für $\cos x_0 = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, und es wird alsdann der Werth des Ausdrucks $\sqrt{\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}$. **52.** Gegeben $PA = r$, Winkel $PAC = \alpha_1$, $PAB = \alpha_2$, wo $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, so wird der halbe Umfang des Dreiecks ABC:

$$s = r\left(\frac{\sin\frac{x+\alpha_2}{2}}{\sin\frac{x-\alpha_2}{2}} + \frac{\cos\frac{x-\alpha_1}{2}}{\cos\frac{x+\alpha_1}{2}}\right) = \frac{r\cdot\cos\alpha/_2 \sin x}{\sin(x+\delta/_2) - \sin\alpha/_2},$$ wenn

$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = \delta$ gesetzt wird, folglich für den Minimalwerth $\cos x_0 = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha/_2}$

und $\frac{s_0}{r} = \frac{\cos\alpha/_2}{\cos\delta - \sqrt{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}}$. Es lässt sich leicht nachweisen, dass $PB_0 + AB_0 = PC_0 + AC_0$ ist, d. h. dass P der Berührungspunkt ist desjenigen dem Dreieck AB_0C_0 eingeschriebenen Kreises, der die Seite B_0C_0 von Aussen berührt. (Geometrische Lösung. Wenn durch B_1C_1 und B_2C_2 vom Winkel A Dreiecke von gleichem Umfange abgeschnitten werden, so sind nach einem bekannten Satze B_1C_1 und B_2C_2 Tangenten desselben dem Winkel A eingeschriebenen Kreises: im Grenzfall, wo B_1C_1 und B_2C_2 in B_0C_0 zusammenfallen, wird B_0C_0 diejenige Tangente, für welche P selbst Berührungspunkt ist.) **53.** Multiplicirt man die beiden Seiten der gegebenen Gleichung mit $4r^2$ und führt an Stelle von $2r\cdot\sin\alpha$, $2r\cdot\sin\beta$, $2r\cdot\sin\gamma_0$ bezüglich a, b, c_0 ein, so wird die Gleichung

$$a^2 + 2ab\cdot\cos\gamma + b^2 = c_0{}^2,$$

und aus dieser geht hervor, dass a, b, c_0 als Seiten ein Dreieck bestimmen, in welchem der Gegenwinkel von c_0 das Supplement ist von γ. Dieses Dreieck ABC_0 kann dazu dienen, zu jedem Werthe von α den zugehörigen Werth von β zu construiren, indem β der zu b gehörige Peripheriewinkel in dem Kreise mit dem Radius r ist. Trägt man in denselben Kreis γ_0 und γ als Peripheriewinkel ein, so ist, weil $\gamma_0 > \gamma$ vorausgesetzt ist, auch von den zugehörigen Sehnen $c_0 > c$ und demnach auch

$$\alpha + \beta > \gamma.$$

Nunmehr construire man über $AB = c_0$ als Seite ausser dem Dreieck ABC_0 noch ein zweites beliebiges Dreieck ABC_1, in welchem zwei zusammengehörige Winkel α und β, bezüglich gleich C_1AB und C_1BA vorkommen, so ist Winkel $C_1 = 180° - (\alpha+\beta)$ und demnach, weil $C_0 = 180° - \gamma$ ist:

$$C_1 < C_0.$$

Dagegen verhält sich auch hier $BC_1 : AC_1 = \sin\alpha : \sin\beta$, und weil ebenso $BC_0 : AC_0 = \sin\alpha : \sin\beta$, so auch

$$BC_1 : AC_1 = BC_0 : AC_0,$$

demgemäss liegen die Punkte C_0 und C_1 auf dem Kreise, der die beiden Punkte D und E, durch welche die Basis AB in dem

gleichen Verhältniss $\sin\alpha : \sin\beta$ getheilt wird, zu Endpunkten des Durchmessers hat, und zwar wenn E der äussere Theilungspunkt ist, liegt C_1 dem Punkte E näher als C_0, d. h. es ist

$$C_1E < C_0E.$$

Die Lösung der gestellten Aufgabe ergiebt sich jetzt leicht aus einer passenden Darstellung des Werthes von $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$: es ergiebt sich aus der bekannten Formel: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ und nach Erweiterung mit $2r$:

$$= \frac{2r\sin\alpha + 2r\sin\beta}{4r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{C_0B + C_0A}{4r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Bezeichnet man die Winkel C_0AB und C_0BA bezüglich durch α_0 und β_0, wo also $\alpha_0 + \beta_0 = \gamma$ ist, so ergiebt sich aus dem Dreieck ABC_0 durch eine einfache Entwickelung (§ 23, Aufg. 1): $\frac{C_0B + C_0A}{AB} = \frac{\cos\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}}{\cos\gamma/2}$, wo $AB = 2r \cdot \sin\gamma_0$ ist, so dass weiter: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\gamma_0 \cdot \cos\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}}{2\cos\gamma/2 \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$,

und weil endlich, der oben beschriebenen Figur entsprechend, $\cos\frac{\alpha_0-\beta_0}{2} = \frac{EC_0}{ED}$ und $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{EC_1}{ED}$, folglich weil sich $EC_0 > EC_1$ ergeben hat, $\cos\frac{\alpha_0-\beta_0}{2} > \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ist, so ist auch $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\sin\gamma_0}{2\cos\gamma/2}$, ausser wenn $\alpha = \beta$ ist, weil alsdann auch $\alpha_0 = \beta_0$ wird, für die Annahme $\alpha = \beta$ erreicht also $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ und demnach auch $\alpha + \beta$ seinen kleinsten Werth, und zwar wird alsdann

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = (\sin\alpha = \sin\beta =) \frac{\sin\gamma_0}{2\cos\gamma/2}.$$

§ 36.

1. Es ist $\lambda = \cos x \cdot \operatorname{tg} x/2$, d. i. $\cos x^3 - \cos x^2 + \lambda^2(\cos x + 1) = 0$, für $\lambda = 0{,}3$ ergiebt sich $x_1 = 53^\circ\, 7{,}8'$, $x_2 = 59^\circ\, 31{,}8'$; $\cos x_3 = 0{,}2 - \sqrt{0{,}19}$ gehört zu keinem rechtwinkligen Dreieck.

2. Gegeben $a = \lambda\varrho$ und $b = \mu\varrho$, so ist $\operatorname{ctg}\gamma/_2 = x$ eine Wurzel der Gleichung $x^3 - (\lambda + \mu)\, x^2 + (\lambda\mu + 1)\, x = \lambda + \mu$.
3. Gegeben $a = \lambda\varrho_c$ und $b = \mu\varrho_c$, so ist $\operatorname{ctg}\gamma/_2 = x$ eine Wurzel derselben Gleichung wie in Aufg. 2. 4. Gegeben $a = \lambda\varrho_a$, $b = \mu\varrho_a$, so ergeben sich zur Bestimmung der Winkel die Gleichungen:

$$\operatorname{ctg}\alpha/_2{}^3 - (\lambda + 2\mu)\operatorname{ctg}\alpha/_2{}^2 + (\lambda\mu + \mu^2 + 1)\operatorname{ctg}\alpha/_2 = \lambda,$$
$$\operatorname{tg}\beta/_2{}^3 - (2\lambda + \mu)\operatorname{tg}\beta/_2{}^2 + (\lambda^2 + \lambda\mu + 1)\operatorname{tg}\beta/_2 = \mu,$$
$$\operatorname{tg}\gamma/_2{}^3 - (\lambda - \mu)\operatorname{tg}\gamma/_2{}^2 - (\lambda\mu - 1)\operatorname{tg}\gamma/_2 = \lambda - \mu. \quad \text{(Aufg. 2).}$$

5. Gegeben $b + c = \lambda r$ und $\varrho = \mu r$, so ergiebt sich
$$\sin\alpha^3 - \lambda \cdot \sin\alpha^2 + (\lambda^2/_4 + 2\mu + \mu^2)\sin\alpha = \lambda\mu.$$
6. Gegeben $b - c = \lambda r$ und $\varrho_b = \mu r$, so ergiebt sich
$$\sin\alpha^3 + \lambda\sin\alpha^2 + (\lambda^2/_4 - 2\mu + \mu^2)\sin\alpha = \lambda\mu.$$
7. Gegeben $s = \lambda r$ und $\varrho = \mu r$, so sind die Sinus der Winkel des Dreiecks die Wurzeln der Gleichung:
$$x^3 - \lambda x^2 + \frac{\lambda^2 + 4\mu + \mu^2}{4}\, x = \frac{\lambda\mu}{2};$$
für den besonderen Fall werden die Winkel: $14^\circ\, 15'$, $53^\circ\, 7{,}8'$, $112^\circ\, 37{,}2'$. 8. Gegeben $s - a = \lambda r$ und $\varrho_a = \mu r$, so ergiebt sich
$$\sin\alpha^3 + \lambda\sin\alpha^2 + \left(\frac{\lambda^2 - 4\mu + \mu^2}{4}\right)\sin\alpha = \frac{\lambda\mu}{2}.$$
9. Die oberen Höhenabschnitte verhalten sich wie die Cosinus der Winkel des Dreiecks; es sei $x\cos\alpha = \lambda$, $x\cos\beta = \mu$, $x\cos\gamma = \nu$, so wird die zu erfüllende Gleichung
$$x^3 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\, x = 2\lambda\mu\nu.$$
Für den speziellen Fall:
$$x^3 - 14x = 12, \quad \text{woraus} \quad \alpha = 75^\circ\, 55{,}7',\ \gamma = 43^\circ\, 10'.$$
10. Die Lösung kommt mit der von Aufg. 9 überein; für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ ergiebt sich $2r = 4{,}1131$. 11. Es sei $x\sin\alpha/_2 = \lambda$, $x\sin\beta/_2 = \mu$, $x\sin\gamma/_2 = \nu$, so ergiebt sich wie in Aufg. 9:
$$x^3 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\, x = 2\lambda\mu\nu.$$
12. Es sei $x\sin\alpha = \lambda$, $x\sin\beta = \mu$, $x\cos\gamma = \nu$, so ergiebt sich aus der Gleichung $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$:
$$x^3 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\, x + 2\lambda\mu\nu = 0.$$
13. Wird der Durchmesser durch x bezeichnet und sind α, β, γ die zu den Seiten a, b, c gehörigen Peripheriewinkel, so ergiebt sich wie in Aufg. 12:
$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\, x + 2abc = 0.$$

14. Bezeichnet man die Basiswinkel durch x, die übrigen Winkel durch y, so ergeben sich die Gleichungen:

$$3y + 2x = 3\pi \text{ und } \sin y/2 = \tfrac{1}{2} - \cos x,$$

folglich $\frac{1}{2} - \cos x = \cos x/3$, oder wenn man $x/3$ durch u bezeichnet: $\cos u^3 - \frac{1}{2}\cos u = \frac{1}{8}$, deren drei Wurzeln sind: $u_1 = 36°$, $u_2 = 108°$, $u_3 = 120°$, d. h. $x_1 = 108°$, $x_2 = 324°$, entsprechend dem Sternfünfeck. **15.** Das Loth sei x und die Differenz d, so hat man $a = x + 3d$, $b = x + 2d$, $c = x + d$, $h_c = x$ und es ergiebt sich die Gleichung: $x^3 = 24d^2x + 48d^3$, woraus $x = h_c = 5{,}6946\,d$ u. s. w. **16.** Es ist

$$d + r\cos\alpha = a \cdot \sin(x - \alpha) + r \cdot \operatorname{ctg} x/2 \cdot \sin\alpha$$

und wenn man $d + r\cos\alpha = e$ setzt:

$$r\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg} x/2^3 - (e + a\sin\alpha) \cdot \operatorname{ctg} x/2^2 + (2a\cos\alpha + r\sin\alpha) \cdot \operatorname{ctg} x/2 = e - a\sin\alpha,$$

also für den speziellen Fall:

$$\operatorname{ctg} x/2^3 - (7 + \sqrt{3}) \cdot \operatorname{ctg} x/2^2 + (6\sqrt{3} + 1) \cdot \operatorname{ctg} x/2 = 1 + \sqrt{3},$$

gesetzt $\operatorname{ctg} x/2 = y + 2{,}9187$, so wird $y^3 - 13{,}976\,y = 18{,}753$, und daraus $y_1 = 4{,}2841$, $y_2 = -2{,}6014$, $y_3 = -1{,}6827$ und $x_1 = 15°\,49{,}5'$, $x_2 = 145°\,37{,}6'$, $x_3 = 78°\,18{,}8'$.
17. Es ergiebt sich, wenn man wieder $d + r\cos\alpha = e$ setzt:

$$r\sin\alpha \cdot \operatorname{tg} x/2^3 + (e - a\sin\alpha)\operatorname{tg} x/2^2 - (2a\cos\alpha - r\sin\alpha)\operatorname{tg} x/2 + e + a\sin\alpha = 0.$$

Wird $d = r = \varrho$ d. h. $e = 2\varrho\cos\alpha/2^2$, so wird die Gleichung

$$\varrho\sin\alpha \cdot \operatorname{tg} x/2^3 + (2\varrho\cos\alpha/2^2 - a\sin\alpha)\operatorname{tg} x/2^2 - (2a\cos\alpha - \varrho\sin\alpha)\operatorname{tg} x/2$$
$$+ 2\varrho\cos\alpha/2^2 + a\sin\alpha = 0$$

und lässt sich der Faktor $\operatorname{tg} x/2 + \operatorname{ctg} \alpha/2 = 0$ beseitigen, so dass übrig bleibt

$$\operatorname{tg} x/2^2 - a/\varrho \operatorname{tg} x/2 + 1 + a/\varrho \operatorname{tg} \alpha/2 = 0,$$

welche zugleich zur Lösung der Aufgabe dient: das Dreieck aufzulösen, von welchem a, α, ϱ gegeben sind. (Vergl. § 23, Aufg. 14). **18.** Es wird in Aufg. 16 $d = r = \varrho_a$ und demnach $e = 2\varrho_a \cdot \cos\alpha/2^2$, folglich ist die zur Bestimmung des Nebenwinkels von B dienende Gleichung:

$$\varrho_a\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg} x/2^3 - (2\varrho_a\cos\alpha/2^2 + a\sin\alpha)\operatorname{ctg} x/2^2 + (2a\cos\alpha + \varrho_a\sin\alpha)\operatorname{ctg} x/2$$
$$= 2\varrho_a\cos\alpha/2^2 - a\sin\alpha.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\operatorname{ctg} x/2 = \operatorname{ctg} \alpha/2$, d. h. $x = \alpha$, und nach deren Beseitigung ergiebt sich die quadratische Gleichung:

$$\operatorname{ctg} x/2^2 - \frac{a}{\varrho_a}\operatorname{ctg} x/2 + 1 - \frac{a}{\varrho_a}\operatorname{tg} \alpha/2 = 0.$$

welche auch leicht direkt zu erhalten ist. (Vergl. § 23, Aufg. 15).

19. Es ist $\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} =$

$$= \frac{\mu_1^2 - \lambda\mu_1 \cos x + \lambda_1\mu_1 \cos x - \lambda\lambda_1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu_1^2 - 2\lambda\mu_1 \cos x} \cdot \sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + 2\lambda_1\mu_1 \cos x}},$$

und $\cos\delta = \frac{DC^2 + DA^2 - AC^2}{2DC \cdot DA} =$

$$= \frac{\mu^2 - \lambda_1\mu \cos x + \lambda\mu \cos x - \lambda\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu^2 - 2\lambda_1\mu \cos x} \cdot \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos x}},$$

und $\cos\beta + \cos\delta = 0$; die sich daraus ergebende Gleichung ist vom dritten Grade und zwar

$$2\mu\mu_1(\lambda - \lambda_1)\cos x^3 + (\mu - \mu_1)(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\cos x^2$$
$$- 2\mu\mu_1(\lambda - \lambda_1)\cos x - (\mu - \mu_1)(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) = 0,$$

und wenn noch der Faktor $1 - \cos x^2$ gehoben wird:

$$\cos x = -\frac{(\mu - \mu_1)(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)}{2(\lambda - \lambda_1)\mu\mu_1}.$$

20. Ist d die Halbirungslinie, a die Basis und b ein Schenkel, so hat man $\lambda = \frac{d}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin {}^{3\beta}\!/\!_2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2\cos {}^{\beta}\!/\!_2}{4\cos {}^{\beta}\!/\!_2{}^2 - 1} \cdot \frac{a}{b}$ und

$$\cos {}^{\beta}\!/\!_2 = \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a + 2b}{b}},$$

d. i. wenn man $\frac{a}{b} = 2\cos\beta = x$ einführt:

$$\lambda(x + 1) = x\sqrt{x + 2} \text{ oder } x^3 + (2 - \lambda^2)x^2 - \lambda^2(2x + 1) = 0;$$

also dient zur Bestimmung von x eine cubische Gleichung. Für die besondere Annahme $\lambda = 1$ ist $\alpha = \frac{3\beta}{2}$, folglich $\beta = \frac{2\pi}{7}$, wo π an Stelle von $2R$ gesetzt ist, also ist β der Centriwinkel des regelmässigen Siebenecks (vergl. Aufg. 22): wenn man statt x einführt $2\cos\beta$, so wird die cubische Gleichung:

$8\cos\beta^3 + 4\cos\beta^2 - 4\cos\beta - 1 = 0$, deren Wurzeln sind die Cosinus der Winkel $\beta_1 = \frac{2\pi}{7}$, $\beta_2 = \frac{4\pi}{7}$, $\beta_3 = \frac{6\pi}{7}$, d. i. $\cos 51^\circ\, 25{,}7'$, $\cos 102^\circ\, 51{,}4'$, $\cos 154^\circ\, 17{,}1'$. Anmerkung. Für $\lambda = \frac{a}{b}$ wird die Gleichung $4\cos\beta^2 + 2\cos\beta - 1 = 0$, deren

Wurzeln sind $\frac{2\pi}{5}$ und $\frac{4\pi}{5}$, die Centriwinkel des regelmässigen Fünfecks. (Vergl. Aufg. 21.) **21.** Man hat für $\varphi = \pi/_5$:

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi = \tfrac{1}{2} = -(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)$$

$$\text{und } \cos\varphi \cdot \cos 3\varphi = \tfrac{1}{2}(\cos 4\varphi + \cos 2\varphi) = -\tfrac{1}{4},$$

folglich sind $\cos\varphi$ und $\cos 3\varphi$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $u^2 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} = 0$, und zwar $\cos \pi/_5 = \cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ und $\cos\frac{3\pi}{5} = \cos 108° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. **22.** Für $\varphi = \pi/_7$ hat man:

1. $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi = \frac{1}{2} = -(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi)$,

ferner: $2\cos\varphi \cdot \cos 5\varphi = \cos 6\varphi + \cos 4\varphi = -\frac{1}{2} - \cos 2\varphi$,

$2\cos\varphi \cdot \cos 3\varphi = \cos 4\varphi + \cos 2\varphi = -\frac{1}{2} - \cos 6\varphi$,

$2\cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi = \cos 8\varphi + \cos 2\varphi$

$= \cos 6\varphi + \cos 2\varphi = -\frac{1}{2} - \cos 4\varphi$,

folglich durch Addition und unter Benutzung von Gleichung 1:

2. $\cos\varphi \cdot \cos 3\varphi + \cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi + \cos 5\varphi \cdot \cos\varphi = -\frac{1}{2}$;

endlich $4\cos\varphi \cdot \cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi = -\cos 5\varphi - 2\cos 6\varphi \cdot \cos 5\varphi$

$= -\cos 5\varphi - \cos 11\varphi - \cos\varphi$

$= -\cos 5\varphi - \cos 3\varphi - \cos\varphi = -\frac{1}{2}$

d. h. 3. $\cos\varphi \cdot \cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi = -\frac{1}{8}$.

Vermöge der Gleichungen 1—3 stellen sich $\cos\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\cos 5\varphi$ als Wurzeln dar der cubischen Gleichung:

$$u^3 - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{8} = 0,$$

d. h. $0{,}90097 = \cos 25° 42\frac{6}{7}'$, $0{,}22252 = \cos 77° 8\frac{4}{7}'$,

$-0{,}62349 = \cos 128° 34\frac{2}{7}'$.

23. Für $\varphi = \pi/_{13}$ hat man zunächst:

$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 11\varphi = \frac{1}{2}$

$= -(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \cos 8\varphi + \cos 10\varphi + \cos 12\varphi)$;

ferner setze man: $\cos\varphi + \cos 5\varphi = x = -(\cos 8\varphi + \cos 12\varphi)$,

$\cos 3\varphi + \cos 11\varphi = y = -(\cos 2\varphi + \cos 10\varphi)$,

$\cos 7\varphi + \cos 9\varphi = z = -(\cos 4\varphi + \cos 6\varphi)$,

so hat man $x + y + z = \frac{1}{2}$; 1.

ferner ist:

$$2xy = \cos 4\varphi + \cos 2\varphi + \cos 8\varphi + \cos 2\varphi + \cos 12\varphi + \cos 10\varphi + \cos 16\varphi + \cos 6\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{2} + \cos 2\varphi + \cos 10\varphi = -\tfrac{1}{2} - y,$$
$$2zx = -\tfrac{1}{2} + \cos 8\varphi + \cos 12\varphi = -\tfrac{1}{2} - x,$$
$$2yz = -\tfrac{1}{2} + \cos 6\varphi + \cos 4\varphi = -\tfrac{1}{2} - z,$$

d. i. $$xy + zx + yz = -1; \qquad 2.$$

endlich

$$4xyz = 4xy \cdot z$$
$$= -(\cos 7\varphi + \cos 9\varphi) + \cos 9\varphi + \cos 5\varphi + \cos 11\varphi + \cos 7\varphi$$
$$+ \cos 17\varphi + \cos 3\varphi + \cos 19\varphi + \cos\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}$$

d. h. $$xyz = \tfrac{1}{8}. \qquad 3.$$

Vermöge der Gleichungen 1 — 3 sind x, y, z (entsprechend den Gaussischen Perioden) die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$u^3 - \tfrac{1}{2}u^2 - u - \tfrac{1}{8} = 0. \qquad 4.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien α_1, α_2, α_3, also etwa

$$\cos\varphi + \cos 5\varphi = \alpha_1 = -(\cos 8\varphi + \cos 12\varphi),$$
$$\cos 3\varphi + \cos 11\varphi = \alpha_2 = -(\cos 2\varphi + \cos 10\varphi),$$
$$\cos 7\varphi + \cos 9\varphi = \alpha_3 = -(\cos 4\varphi + \cos 6\varphi);$$

so dienen weiter zur Bestimmung der einzelnen Cosinus die Gleichungen:

$$2\cos\varphi \cdot \cos 5\varphi = \cos 6\varphi + \cos 4\varphi = -\alpha_3,$$
$$2\cos 3\varphi \cdot \cos 11\varphi = \cos 14\varphi + \cos 8\varphi = \cos 12\varphi + \cos 8\varphi = -\alpha_1,$$
$$2\cos 7\varphi \cdot \cos 9\varphi = \cos 16\varphi + \cos 2\varphi = \cos 10\varphi + \cos 2\varphi = -\alpha_2.$$

Es sind also $\cos\varphi$ und $\cos 5\varphi$, $\cos 3\varphi$ und $\cos 11\varphi$, $\cos 7\varphi$ und $\cos 9\varphi$ bezüglich die Wurzeln der quadratischen Gleichungen:

$$u^2 - \alpha_1 u - \alpha_3/2 = 0, \quad u^2 - \alpha_2 u - \alpha_1/2 = 0, \quad u^2 - \alpha_3 u - \alpha_2/2 = 0.$$

Numerische Berechnung. Durch Lösung der Gleichung (4) ergeben sich:

$$\alpha_1 = 1{,}3255, \quad \alpha_2 = -0{,}1370, \quad \alpha_3 = 0{,}6886,$$

folglich durch Auflösung der drei quadratischen Gleichungen:

$$\cos\varphi = 0{,}9709, \quad \cos 3\varphi = 0{,}7485, \quad \cos 7\varphi = -0{,}1206,$$
$$\cos 5\varphi = 0{,}3546, \quad \cos 11\varphi = -0{,}8855, \quad \cos 9\varphi = -0{,}5680.$$

24. Für $\varphi = \pi/_{17}$ hat man zunächst die Gleichungen:

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos 15\varphi = \tfrac{1}{2}$$
$$= -(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \ldots + \cos 16\varphi).$$

Setzt man nunmehr:

$$\cos\varphi + \cos 9\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi = x$$
und $$\cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 11\varphi = y,$$

so ergiebt sich $x + y = \frac{1}{2}$ und durch Multiplication beider Gleichungen

$$2xy = 4(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \ldots + \cos 16\varphi), \\ = -2,$$

folglich $xy = -1$,
so dass x und y Wurzeln sind der quadratischen Gleichung:

$$u^2 - \tfrac{1}{2}u - 1 = 0. \qquad 1.$$

Es seien α_1 und α_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so theile man weiter:

$$\cos\varphi + \cos 13\varphi = s, \qquad \cos 3\varphi + \cos 5\varphi = v,$$
$$\cos 9\varphi + \cos 15\varphi = t, \quad \text{und} \quad \cos 7\varphi + \cos 11\varphi = w,$$

so wird man etwa haben:

$$s + t = \alpha_1 \text{ und } v + w = \alpha_2;$$

ferner aber ergiebt sich zur Bestimmung der Werthe von s und t, bezüglich von v und w durch Ausführung der Multiplication:

$$2st = \cos 10\varphi + \cos 8\varphi + \cos 22\varphi + \cos 4\varphi \\ + \cos 16\varphi + \cos 14\varphi + \cos 28\varphi + \cos 2\varphi,$$

und weil $\cos 22\varphi = \cos 12\varphi$ und $\cos 28\varphi = \cos 6\varphi$ ist:

$$2st = -\tfrac{1}{2}, \text{ d. h. } st = -\tfrac{1}{4},$$

und auf gleiche Weise $vw = -\frac{1}{4}$,

so dass s und t, bezüglich v und w, Wurzeln sind der quadratischen Gleichungen $u^2 - \alpha_1 u - \frac{1}{4} = 0$ und $u^2 - \alpha_2 u - \frac{1}{4} = 0$. 2 und 3.
Um endlich die Werthe der einzelnen Cosinus selbst zu bestimmen, hat man noch auszuführen die Produkte $\cos\varphi \cdot \cos 13\varphi$, $\cos 9\varphi \cdot \cos 15\varphi$, $\cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi$, $\cos 7\varphi \cdot \cos 11\varphi$. Es ergiebt sich:

$$2\cos\varphi \cdot \cos 13\varphi = \cos 12\varphi + \cos 14\varphi = -(\cos 5\varphi + \cos 3\varphi) = -v,$$
$$2\cos 9\varphi \cdot \cos 15\varphi = \cos 24\varphi + \cos 6\varphi = -(\cos 7\varphi + \cos 11\varphi) = -w,$$

ebenso $2\cos 3\varphi \cdot \cos 5\varphi = -t$ und $2\cos 7\varphi \cdot \cos 11\varphi = -s$,
so dass, wenn man die Wurzeln der Gleichungen (2) und (3) bezüglich durch β_1, β_2 und γ_1, γ_2 bezeichnet:

$\cos\varphi$ und $\cos 13\varphi$ Wurzeln sind der Gleichung: $u^2 - \beta_1 u - \gamma_1/_2 = 0$, 4.
$\cos 9\varphi$ und $\cos 15\varphi$ „ „ „ „ $u^2 - \beta_2 u - \gamma_2/_2 = 0$, 5.
$\cos 3\varphi$ und $\cos 5\varphi$ „ „ „ „ $u^2 - \gamma_1 u - \beta_2/_2 = 0$, 6.
$\cos 7\varphi$ und $\cos 11\varphi$ „ „ „ „ $u^2 - \gamma_2 n - \beta_1/_2 = 0$, 7.

Demgemäss sind zur Darstellung der Werthe der Cosinus der einzelnen Vielfachen von φ sieben quadratische Gleichungen zu lösen.

Numerische Berechnung. Es ergeben sich die Werthe:

$$\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4} = -0{,}78078, \quad \alpha_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} = 1{,}28078,$$

$$\left.\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = \frac{1-\sqrt{17} \pm \sqrt{2\sqrt{17}(\sqrt{17}-1)}}{8} = \begin{cases} 0{,}24396, \\ -1{,}02474, \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{matrix}\right\} = \frac{1+\sqrt{17} \pm \sqrt{2\sqrt{17}(\sqrt{17}+1)}}{8} = \begin{cases} 1{,}45285, \\ -0{,}17208, \end{cases}$$

und endlich

$$\cos\varphi = 0{,}98297, \quad \cos 13\varphi = -0{,}73901,$$
$$\cos 9\varphi = -0{,}09227, \quad \cos 15\varphi = -0{,}93247,$$
$$\cos 3\varphi = 0{,}85022, \quad \cos 5\varphi = 0{,}60263,$$
$$\cos 7\varphi = 0{,}27366, \quad \cos 11\varphi = -0{,}44574.$$

§ 37.

1. $x = 59^\circ\,14{,}2'$, $y = 60^\circ\,15{,}4'$, $z = 61^\circ\,33{,}6'$.

2. $x = 58^\circ\,59{,}1'$, $y = 61^\circ\,2{,}2'$, $z = 60^\circ\,31{,}9'$.

3. $x = 58^\circ\,44{,}2'$, $y = 61^\circ\,47{,}4'$, $z = 59^\circ\,28{,}8'$.

4. Man bilde $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, so ergiebt sich $\alpha+\beta=\gamma$.

5. (Anschl.) Es wird $\beta-\alpha=\gamma$. **6.** Es ist

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1 + 2\cos\lambda\cdot\cos\mu\cdot\cos\nu,$$

für den Beweis sind die Fälle zu unterscheiden, ob P innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegt, d. h. ob von den Winkeln λ, μ, ν die Summe $4R$ (2π) beträgt oder zwei zusammengenommen den dritten ergeben. **7.** Es ergiebt sich

$$4\sin\frac{\mu+\nu}{2}\cdot\sin\frac{\nu+\lambda}{2}\cdot\sin\frac{\lambda+\mu}{2} = 4\sin\frac{\lambda+\omega}{2}\cdot\sin\frac{\mu+\omega}{2}\cdot\sin\frac{\nu+\omega}{2}.$$

a. Für $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta$, $\nu=\gamma$, $\omega=\pi$: . . . $4\cos{}^{\alpha}\!/_2\cdot\cos{}^{\beta}\!/_2\cdot\cos{}^{\gamma}\!/_2$.

b. „ $\lambda=2\alpha$, $\mu=2\beta$, $\nu=2\gamma$, $\omega=0$: . . . $4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

c. „ $\lambda={}^{\alpha}\!/_2$, $\mu={}^{\beta}\!/_2$, $\nu={}^{\gamma}\!/_2$, $\omega=\frac{3\pi}{2}$: . . . $1+4\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\pi-\beta}{4}\cdot\sin\frac{\pi-\gamma}{4}$.

d. „ $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta$, $\nu=\pi+\gamma$, $\omega=0$: . . . $4\sin{}^{\alpha}\!/_2\cdot\sin{}^{\beta}\!/_2\cdot\cos{}^{\gamma}\!/_2$.

e. „ $\lambda=2\alpha$, $\mu=2\beta$, $\nu=\pi+2\gamma$, $\omega=-\pi$: . . . $4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$.

f. „ $\lambda={}^{\alpha}\!/_2$, $\mu={}^{\beta}\!/_2$, $\nu=\frac{\pi+\gamma}{2}$, $\omega=\pi$: . . . $4\cos{}^{\alpha}\!/_4\cdot\cos{}^{\beta}\!/_4\cdot\sin\frac{\pi-\gamma}{4}$.

g. „ $\lambda={}^{\pi}\!/_2-\alpha$, $\mu={}^{\pi}\!/_2-\beta$, $\nu={}^{\pi}\!/_2-\gamma$, $\omega=\frac{3\pi}{2}$: . . . $1+4\sin{}^{\alpha}\!/_2\cdot\sin{}^{\beta}\!/_2\ \sin{}^{\gamma}\!/_2$.

h. Für $\lambda = \pi/_2 - 2\alpha,\ \mu = \pi/_2 - 2\beta,\ \nu = \pi - 2\gamma,\ \omega = 2\pi : \ldots$
$- 4\cos(\pi/_4 - \alpha)\cdot\cos(\pi/_4 - \beta)\cdot\cos\gamma.$

i. „ $\lambda = \frac{\pi - \alpha}{2},\ \mu = \frac{\pi - \beta}{2},\ \nu = \frac{3\pi - \gamma}{2},\ \omega = 0 : \ldots$
$4\sin\frac{\pi - \alpha}{4}\cdot\sin\frac{\pi - \beta}{4}\cdot\cos\frac{\pi - \gamma}{4}.$

k. „ $\lambda = \pi/_2 - \alpha,\ \mu = \pi/_2 - \beta,\ \nu = 2\pi - \gamma,\ \omega = 0 : \ldots$
$4\sin\frac{\pi - 2\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\pi - 2\beta}{4}\cdot\sin\gamma/_2.$

l. „ $\lambda = \pi/_2 - 2\alpha,\ \mu = \pi/_2 - 2\beta,\ \nu = \pi/_2 - 2\gamma,\ \omega = \frac{5\pi}{2} : \ldots$
$2 + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

m. „ $\lambda = \pi/_2 - 2\alpha,\ \mu = \pi/_2 - 2\beta,\ \nu = \frac{3\pi}{2} - 2\gamma,\ \omega = \frac{3\pi}{2} : \ldots$
$2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma.$

n. „ $\lambda = \pi/_2 - 4\alpha,\ \mu = \pi/_2 - 4\beta,\ \nu = \pi/_2 - 4\gamma,\ \omega = \frac{9\pi}{2} : \ldots$
$1 + 2\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma.$

o. „ $\lambda = \pi/_2 - \alpha,\ \mu = \pi/_2 - \beta,\ \nu = \frac{3\pi}{2} - \gamma,\ \omega = \pi/_2 : \ldots$
$2\cos\alpha/_2\cdot\cos\beta/_2\cdot\sin\gamma/_2.$

8. Die darzustellende Summe sei S, so ergiebt sich (§ 7, Aufg. 21)

$$S = \frac{2n-1}{4} - \frac{\sin(2n-1)\alpha}{4\sin\alpha} = \tfrac{1}{4}(2n - 1 - \sin 2n\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha + \cos 2n\alpha),$$

folglich wenn man für α einsetzt $\frac{m\pi}{2n}$, d. h. wenn α ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2n}$ ist, weil alsdann $\sin m\pi = 0$ wird und $\cos m\pi = \pm 1$, jenachdem $m \begin{cases}\text{gerade,}\\ \text{ungerade,}\end{cases}$

so wird $S = \frac{n}{2}$, wenn m gerade,

„ „ $S = \frac{n-1}{2}$, wenn m ungerade.

9. Es handle sich zunächst um die Summe:

$$S_1 = \sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta + \ldots + \sin(n-1)\alpha\cdot\sin(n-1)\beta$$

für die Werthe $\alpha = \frac{p\pi}{n}$ und $\beta = \frac{q\pi}{n}$. Erster Fall. $p \gtrless q$.

Es ist

$$1.\quad \begin{cases} \sin\alpha \cdot \sin\beta = \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2, \\ \sin 2\alpha \quad \sin 2\beta = \left(\sin 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\sin 2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2, \\ \cdot\;\cdot \\ \sin(n-1)\alpha\cdot\sin(n-1)\beta = \left(\sin(n-1)\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\sin(n-1)\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2, \end{cases}$$

also weil sowohl $\frac{\alpha+\beta}{2} = (p+q)\cdot\frac{\pi}{2n}$, als $\frac{\alpha-\beta}{2} = (p-q)\frac{\pi}{2n}$ Vielfache sind von $\frac{\pi}{2n}$ und zwar zugleich gerade oder ungerade Vielfache, so ist bei Ausführung der Summe S_1 stets (Aufg. 6) die Summe der Minuenden gleich der der Subtrahenden, folglich $S_1 = 0$. Zweiter Fall. $p = q$: alsdann sind auch α und β einander gleich. Es werden also in den Ausdrücken (1) die Subtrahenden gleich Null und, weil $p+q$ nunmehr stets eine gerade Zahl ist, nach Aufg. 6 die Summe der Minuenden gleich $\frac{n}{2}$: folglich ergiebt sich, wenn man $\frac{\pi}{n}$ durch γ bezeichnet:

$$2.\quad \sin p\gamma\cdot\sin q\gamma + \sin 2p\gamma\cdot\sin 2q\gamma + \ldots + \sin(n-1)p\gamma\cdot\sin(n-1)q\gamma = 0,$$

wenn p und q verschiedene ganzzahlige Werthe haben, und

$$3.\quad \sin p\gamma^2 + \sin 2p\gamma^2 + \ldots + \sin(n-1)p\gamma^2 = \frac{n}{2}.$$

10. Man multiplicire die Gleichungen, um y zu eliminiren, bezüglich mit $\sin\gamma$ und $\sin 2\gamma$, so ergiebt sich nach Aufg. 9 durch Addition: $\frac{3}{2}x = a\sin\gamma + b\sin 2\gamma$, und wenn man die erste Gleichung mit $\sin 2\gamma$, die zweite mit $\sin 4\gamma$ multiplicirt und dann addirt: $\frac{3}{2}y = a\sin 2\gamma + b\sin 4\gamma$. **11.** Indem man die Gleichungen mit $\sin\gamma$, $\sin 2\gamma$, $\sin 3\gamma$, bezüglich mit $\sin 2\gamma$, $\sin 4\gamma$, $\sin 6\gamma$, bezüglich mit $\sin 3\gamma$, $\sin 6\gamma$, $\sin 9\gamma$ multiplicirt und dann addirt, ergiebt sich (Aufg. 9):

$$2x = a\sin\gamma + b\sin 2\gamma + c\sin 3\gamma,\quad 2y = a\sin 2\gamma + b\sin 4\gamma + c\sin 6\gamma,$$
$$2z = a\sin 3\gamma + b\sin 6\gamma + c\sin 9\gamma.$$

12. Um den Werth von x_k zu erhalten, multiplicire man die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit $\sin k\gamma$, $\sin 2k\gamma$,

$\sin 3k\gamma, \ldots \sin(n-1)k\gamma$, so ergiebt sich nach Aufg. 7, Gl. 2 und 3:

$$\frac{n}{2}x_k = a_1 \cdot \sin k\gamma + a_2 \cdot \sin 2k\gamma + \ldots + a_{n-1} \cdot \sin(k-1)\gamma,$$

wo für k die Zahlen 1, 2, 3, .. $n-1$ zu setzen sind. **13.** Die gesuchten Radien sind gleich dem Radius des inneren Berührungskreises für ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe r und dessen Basiswinkel gleich 30° sind, d. h. $= 2r \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot \cos 30°$.

14. Gesetzt $\gamma = \frac{\pi}{n}$, so ist $x = r \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - 2\gamma}{4}$, $y = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - 2\gamma^2}{4}$.

15. $x = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi - 2\gamma}{4}$, $y = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - 2\gamma}{4}$.

16. Ein jeder dieser Kreise lässt sich auffassen als äusserer Berührungskreis an der Basis eines bestimmten gleichschenkligen Dreiecks: die Radien werden $2r \cdot \operatorname{ctg} 15° \cdot \cos 30°$. (Aufg. 13.)

17. Gesetzt $\gamma = \frac{\pi}{n}$, so wird $x = r \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi - 2\gamma}{4}$.

18. $x = r - 3b$; die Kreise werden einander gleich für $b = \frac{r}{4}$.

19. Es wird $x = r - \frac{2b \cdot \cos \gamma/2^2}{\cos\gamma}$, wo $\gamma = \frac{\pi}{n}$, und wenn $x = b = y$ werden soll, $y = \frac{r \cdot \cos\gamma}{16 \cos\frac{3\gamma + 2\pi}{12} \cdot \cos\frac{3\gamma - 2\pi}{12}}$.

20. $x = \frac{a \sin 45°}{4 \cos 15°}$. **21.** $x = \frac{r \cdot \sin 2\gamma \cdot \sin \pi/4}{2 \cos\frac{\pi - 2\gamma}{4}}$, wo $\gamma = \frac{\pi}{n}$.

22. $y = 2r \cdot \sin \pi/4 \cdot \cos\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - 2\gamma}{4} \cdot \sin\frac{\pi - 2\gamma}{4}$, und wenn $y = x$ sein soll, $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, d. h. $n = 6$. **23.** $x = a/6\sqrt{3} \pm \sqrt{b^2 - a^2/4} + b$, $x_1 = a/6\sqrt{3} \pm \sqrt{b^2 - a^2/4} - b$, $b = a/2\sqrt{3} = r$.

24. $x = \varrho \pm \sqrt{b^2 - a^2/4} + b$, $x_1 = \varrho \pm \sqrt{b^2 - a^2/4} - b$, wo $\varrho = a/2 \operatorname{ctg}\gamma$, $\gamma = \frac{\pi}{n}$, $b = \frac{a}{2 \sin 2\gamma}$. **25.** Der Radius des die Seiten b und c berührenden Kreises sei x, so hat man:

$$x \operatorname{ctg}\alpha/2 \cdot \cos\alpha/2 = r \cos\frac{\beta - \gamma}{2} + r_1 \sin\alpha/2 \pm \sqrt{(r\cos\beta + r_1)(r\cos\gamma + r_1)}.$$

27. Ist α der getheilte Winkel des Dreiecks und δ der Winkel der zugehörigen Mittellinie mit der Gegenseite, so erhält man $\cos x = \cos\alpha \cdot \cos\delta$. Dem numerischen Beispiel entspricht $x = 87°9{,}8'$.

28. Es sei $a > b > c$; man erhält: $d_a = \frac{2h_a}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{4fl}{a\sin(\beta-\gamma)}$ u. s. w., folglich
$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = 0,$$
wo d_b einen negativen Werth hat, d. h. der umgekehrte Werth der zur mittleren Seite gehörigen Strecke ist gleich der Summe der umgekehrten Werthe der zur grössten und kleinsten Seite gehörigen Strecken. — Sind zwei Seiten einander gleich, so wird die zur dritten Seite gehörige Strecke unendlich gross, und sind demnach die den beiden ersteren zugehörigen Strecken einander gleich. **29.** Man erhält: $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\nu}{\sin\beta \cdot \sin\mu}$ u. s. w. **30.** Vergl. 33, Aufg. 5. **31.** Sind die Verbindungslinien durch x, y, z bezeichnet, so ergiebt sich $\frac{xyz}{abc} = \operatorname{tg}\alpha/2 \cdot \operatorname{tg}\beta/2 \cdot \operatorname{tg}\gamma/2$. **32.** Es ist $xyz = 4r\varrho^2$. **33.** Folgt aus der Beziehung $ax^2 + by^2 + cz^2 = abc$. **34.** Man erhält, wenn die Verbindungslinien durch x_a, y_a, z_a bezeichnet werden:
$$\frac{x_a \cdot y_a \cdot z_a}{abc} = \operatorname{tg}\alpha/2 \cdot \operatorname{ctg}\beta/2 \cdot \operatorname{ctg}\gamma/2,\ x_a \cdot y_a \cdot z_a = 4r\varrho_a^2,\ ax_a^2 - by_a^2 - cz_a^2 = abc.$$
35 und **35a.** Man dividire die Relation in Aufg. 33, bezüglich die letzte Gleichung in Aufg. 34, durch xyz, bezüglich $x_a \cdot y_a \cdot z_a$. **36.** Ist σ der halbe Umfang des fraglichen Dreiecks, so ergiebt sich $\sigma : \varrho = s : r$, d. h. $\sigma = \frac{s\varrho}{r} = \frac{fl}{r}$; ebenso ist der halbe Umfang des Fusspunktsdreiecks $= \frac{fl}{r}$. **37.** Zwischen den Seiten a, b, c und den Verbindungslinien a_1, b_1, c_1 besteht die Gleichung:
$$a^2a_1^4 + b^2b_1^4 + c^2c_1^4 + a^2b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(b_1^2c_1^2 + a^2a_1^2) + (c^2 + a^2 - b^2)(c_1^2a_1^2 + b^2b_1^2) + (a^2 + b^2 - c^2)(a_1^2b_1^2 + c^2c_1^2),$$
welche etwa zu erhalten ist aus der Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel, welche die Verbindungslinien irgend eines Punktes der Ebene mit drei anderen Punkten derselben bilden (vergl. Aufg. 6):
$$\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2 = 1 + 2\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\gamma_1.$$
Durch Einführung des Inhalts Δ des Dreiecks ergiebt sich als umgeformte Gleichung:
$$a_1^4 \sin\alpha^2 + b_1^4 \sin\beta^2 + c_1^4 \cdot \sin\gamma^2 + 4\Delta^2 = 2b_1^2c_1^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma + 2c_1^2a_1^2 \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha + 2a_1^2b_1^2 \cdot \cos\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + 2\Delta(a_1^2 \cdot \sin 2\alpha + b_1^2 \cdot \sin 2\beta + c_1^2 \cdot \sin 2\gamma);$$

folglich wenn man $a_1 \cdot \sin\alpha = a_2$, $b_1 \cdot \sin\beta = b_2$, $c_1 \cdot \sin\gamma = c_2$ einführt und den Inhalt des durch die Linien a_2, b_2, c_2 als Seiten gebildeten Dreiecks durch Δ_2 bezeichnet:

$$4\,\Delta = 4\Delta_2 - (a_2{}^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha + b_2{}^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + c_2{}^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\gamma).$$

38. Ist Δ der Inhalt des Dreiecks, so wird die Verlängerung eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$x^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) + x(h_a + h_b + h_c) = \Delta.$$

39. Es ist $\mathrm{tg}\,\gamma/2 = \frac{b}{a}$ und $fl = \frac{ab}{2} + \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right)^2 \cdot \frac{b^3}{2a}$, ein Minimum für $\lambda = \mu$. **40.** $fl = c^2 \cdot \sin 2\varepsilon$. **41.** Die Seiten sind $c\sqrt{\mathrm{tg}\,\varepsilon}$ und $c\sqrt{\mathrm{ctg}\,\varepsilon}$. **42.** 15,508 und 29,784. (Vergl § 28, Aufg. 16). **43.** Unter dem Winkel $56^\circ\, 2{,}9'$. **44.** Zu erfüllen ist die Gleichung $2\sin x/2 = 1 - 2\cos x$, wenn x ein Basiswinkel, d. h. $x_1 = 108^\circ$ dem regelmässigen Fünfeck und $x_2 = 36^\circ$, dem Sternfünfeck entsprechend.

45. $fl = 2a^2 \cdot \sin \alpha/2^2 \cdot \cos\frac{\pi - \alpha}{4} + a/4^2\left(1 + 2\cos\frac{\pi + \alpha}{4}\right)^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha/2$;

$$h \sin \alpha/2 = a\left(\sin\frac{\pi + 2\alpha}{4} + \tfrac{1}{2}\cos \alpha/2\right).$$

46. $fl = a^2/4\,(4\sin\alpha/2^2 - 1) \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi - \alpha}{4} + a^2/2 \sin\alpha$.

$h = a/2\,\mathrm{ctg}\,(\pi - \alpha/4)$.

47. Der Radius ist $\frac{a}{2\cos\alpha/2}$. **48.** $fl = a^2/4\,(3 + \sqrt{2})$.

49. $fl = \frac{a^2}{8\sin\gamma^2}[3\sin 2\gamma + 2\sin 2(k-1)\gamma]$, wo $\gamma = \frac{\pi}{n}$.

Beispiel. Für $n = 5$ wird $fl = \frac{5a^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,\gamma$; für $n = 7$ wird $fl = a^2/4\,\mathrm{ctg}\,\gamma(3 + 4\cos 2\gamma)$. **50.** $fl = \frac{a^2}{8\sin 2\gamma^2}[3\sin 4\gamma + 2\sin(2k-3)2\gamma]$.

Beispiel. Für $n = 4$ wird $fl = a^2/4\,(3 + \sqrt{2})$. (Vergl. Aufg. 48.) Für $n = 6$ wird $fl = a^2/2\,(3\sqrt{3} + 4)$. Für $n = 8$ wird $fl = \frac{a^2}{\sin \pi/8^2}\left(3\sin\pi/4 + 2\sin\frac{5\pi}{8}\right)$. **51.** Wird das Fünfeck durch X bezeichnet, ferner durch a_1 und a_2 zwei Seiten, sowie durch d_1 und d_2 zwei Diagonalen, welche sämmtlich in derselben Ecke 3 des Fünfecks zusammenstossen und hier die Winkel $\alpha = (a_1 d_1)$, $\beta = (d_1 d_2)$, $\gamma = (d_2 a_2)$ bilden, so hat man zwischen diesen Winkeln die Beziehung (§ 32, Aufg. 40):

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma):$$

folglich wenn man mit $a_1 a_2 d_1 d_2$ multiplicirt, weil der Winkel $(\alpha+\beta+\gamma)$ dem Dreieck $\varDelta_3$ zugehört, und wenn die abgeschnittenen Dreiecke in der Reihe $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, $\varDelta_4$, $\varDelta_5$ auf einander folgen, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{4}$:

$$(X-\varDelta_1-\varDelta_4)(X-\varDelta_2-\varDelta_5)=\varDelta_2\cdot\varDelta_4+(X-\varDelta_2-\varDelta_4)\cdot\varDelta_3$$

und demnach:

$$X^2-(\varDelta_1+\varDelta_2+\varDelta_3+\varDelta_4+\varDelta_5)X+\varDelta_1\varDelta_2+\varDelta_2\varDelta_3+\varDelta_3\varDelta_4+\varDelta_4\varDelta_5+\varDelta_5\varDelta_1=0.$$

52. Das Sechseck ist doppelt so gross als das Dreieck ABC. **53.** Die Abschnitte seien, der äussere x, der innere y, so hat man $x:y=\cos{}^{\alpha}\!/_{6}:\cos{}^{\alpha}\!/_{2}$ und $x:a=\sin{}^{\alpha}\!/_{6}:\sin{}^{\alpha}\!/_{2}$. **54.** Man hat $\operatorname{tg}{}^{y}\!/_{2}=\operatorname{tg}({}^{\alpha}\!/_{2}-x)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}{}^{\alpha}\!/_{2}$. **55.** Werden die Winkel BAD, DAE, EAC, bezüglich durch x, y, z bezeichnet, so hat man

entweder $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin\beta\cdot\sin\varphi}$, wo $\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{3\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$ ist,

und ähnlich $\operatorname{ctg} z$, oder auch $\dfrac{\operatorname{tg}({}^{\beta}\!/_{2}+x)}{\operatorname{tg}{}^{\beta}\!/_{2}}=\operatorname{ctg}(u-{}^{\pi}\!/_{4})$, wenn

$\operatorname{tg} u=\dfrac{3\sin\gamma}{\sin\alpha}$ eingeführt ist, und ähnlich $\dfrac{\operatorname{tg}({}^{\gamma}\!/_{2}+z)}{\operatorname{tg}{}^{\gamma}\!/_{2}}$;

$x=19^\circ 51'$, $z=23^\circ 59{,}7'$. **56.** Bei derselben Bezeichnung wie in Aufg. 55 sei Winkel $DAE=\alpha\ (=30^\circ)$ genannt, so

ergiebt sich (§ 32, Aufg. 2) $\dfrac{BC\cdot DE}{BD\cdot EC}=\dfrac{\sin(BC)\cdot\sin(DE)}{\sin(BD)\cdot\sin(EC)}$,

woraus $\cos(x-z)=\frac{1}{3}(4\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$, d. i. $x=46^\circ 46{,}7'$, $z=13^\circ 13{,}3'$, und $\beta=25^\circ 10{,}2'$. **57.** Es ergiebt sich

$$\cos\delta-\cos(\alpha-y)=\tfrac{2}{3}\sin\alpha\cdot\sin y \text{ und daraus}$$

$\sin(y+\varphi)=\dfrac{\cos\delta\cdot\sin\varphi}{\cos\alpha}$, wenn $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{5}{3}\operatorname{tg}\alpha$, $y=21^\circ 2{,}2'$, $\beta=43^\circ 4'$.

58. $\dfrac{DE}{a}=\dfrac{\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin{}^{\alpha}\!/_{3}}{\sin\alpha\cdot\sin({}^{\alpha}\!/_{3}+\beta)\cdot\sin({}^{\alpha}\!/_{3}+\gamma)}=0{,}29387.$

59. $\cos(\beta-\gamma)=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos{}^{\alpha}\!/_{3}-\lambda\cdot\cos\alpha\cdot\sin{}^{\alpha}\!/_{3}}{\lambda\cdot\sin{}^{\alpha}\!/_{3}-\sin\alpha}$, also

$\lambda>\dfrac{\operatorname{tg}{}^{\alpha}\!/_{2}}{\operatorname{tg}{}^{\alpha}\!/_{6}}$; für $\lambda=4$ wird $\beta=84^\circ 32{,}5'$.

60. $\sin x:\sin z=b:c=\sin\beta:\sin\gamma$, $DE=a-c\sin x\cdot\dfrac{\sin(\beta+x)+\sin(\gamma+z)}{\sin(\beta+x)\cdot\sin(\gamma+z)}$.

61. Man hat $\operatorname{tg}\frac{z-x}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}$; $x=14^\circ\,22{,}4'$.

62. $x=20^\circ\,4{,}8'$. **63.** Führt man $a+b+c=0$ ein und entsprechend die Gegenwinkel $BDC=x$, $BDA=z$ und y, so dass $x+y+z=0$, so ergiebt sich:

$$\sin x:\sin y:\sin z=\lambda a:\mu b:\nu c \text{ und } \cos y=-\frac{\lambda^2a^2-\mu^2b^2+\nu^2c^2}{2\lambda\nu ac}$$

64. Werden die Winkel der Verbindungslinien mit x, y, z bezeichnet, so ergiebt sich $\cos x=-\cos\alpha$ u. s. w., d. h. x, y, z sind die Supplemente von α, β, γ: der gesuchte Punkt P ist der Höhenschnittpunkt. **65.** Man erhält $\cos x=-\frac{\mu^2+\nu^2-\lambda^2}{2\mu\nu}$. u. s. w. Es mögen sich die Linien l, m, n verhalten wie $\lambda:\mu:\nu$ und das Dreieck LMN bilden: so errichte man, zur Construction des Punktes P, über einer beliebigen Seite des Dreiecks ABC, z. B. über der Seite c, nach Aussen hin das Dreieck $L_1M_1N_1$, ähnlich dem Dreieck LMN, und zwar so, dass L_1 mit A und M_1 mit B zusammenfällt, und verbinde N_1 mit C, so ist der Schnittpunkt der Linie N_1C mit dem dem Dreieck ABN_1 ($L_1M_1N_1$) umschriebenen Kreise der gesuchte Punkt P. Beweis: $\measuredangle APB=180^\circ-N_1$, $\measuredangle BPC=180^\circ-N_1PB=180^\circ-L_1$ u. s. w.

66. Die Richtigkeit des Satzes folgt aus der Lösung von Aufg. 65, oder direkt aus den Verhältnissen, in denen die Seiten des Dreiecks ABC durch die Linien AL_1, BM_1, CN_1 geschnitten werden: diese sind nach § 30, Aufg. 21, wenn man der Kürze wegen bezeichnet:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\lambda}{\sin(\alpha+\lambda)}=\alpha_0,\quad \frac{\sin\beta\cdot\sin\mu}{\sin(\beta+\mu)}=\beta_0,\quad \frac{\sin\gamma\cdot\sin\nu}{\sin(\gamma+\nu)}=\gamma_0:$$

$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\gamma_0}{\beta_0}$, $\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{\alpha_0}{\gamma_0}$, $\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ u. s. w. **67.** Der Beweis ergiebt sich aus der Lösung von Aufg. 65. **68.** Es wird $\operatorname{tg} u=\frac{(a-b)\,c\cdot\sin\gamma}{ab-c\,(a+b)\cos\gamma+c^2}$. **69.** Die Entfernung x ergiebt sich als Wurzel der Gleichung:

$$x^2-[(a+b)\cos\gamma+(a-b)\sin\gamma\cdot\operatorname{ctg}\delta]\cdot x+ab=0,$$

aus welcher im Allgemeinen zwei Punkte P hervorgehen, ferner

dass das Rechteck der Abstände beider Punkte von C den constanten Werth ab hat (jedes Punktepaar liegt demnach mit A und B auf demselben Kreise). Die Punkte P fallen in einen einzigen zusammen, wenn δ seinen grössten Werth erreicht, d. h. für $\operatorname{ctg}\delta = \frac{2\sqrt{ab} - (a+b)\cdot\cos\gamma}{(a-b)\cdot\sin\gamma}$. **70.** Sind OQ, OQ_1, OQ_2 bezüglich die Projektionen der Linien OP, OP_1, OP_2 auf OA, so hat man

$$PQ\cdot Q_1Q_2 = P_1Q_1\cdot QQ_2 + P_2Q_2\cdot QQ_1 \quad \text{und daraus}$$

$$r = \frac{r_1r_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{r_1\sin(\alpha_1-\alpha)+r_2\sin(\alpha-\alpha_2)},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{r_1\sin\alpha_1 - r_2\sin\alpha_2}{r_2\cos\alpha_2 - r_1\cos\alpha_1}.$$

71. Es ist $\sin(\alpha+\varphi) = \frac{r_1r_2\cdot\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{r(r_2\cos\alpha_2 - r_1\cos\alpha_1)}$, wo φ wie in Aufg. 70 bestimmt ist. **72.** Man erhält

$$\pm 2\varDelta = r_2r_3\sin(\varphi_2-\varphi_3)+r_3r_1\sin(\varphi_3-\varphi_1)+r_1r_2\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

73. $\varDelta = 0$, vergl. Aufg. 72. **74.** (Lösung nach Gauss). Für den Mittelpunkt O als Anfangspunkt und die beliebige Axe OX seien die Eckpunkte des Dreiecks ABC bezüglich gegeben durch die Polarcoordinaten a und α, b und β, c und γ; ist das eingeschriebene Dreieck UVW, so mögen die Coordinaten von U, V, W bezüglich r und φ_1, r und φ_2, r und φ_3 sein: alsdann dienen zur Bestimmung der drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 die drei Gleichungen (Aufg. 73):

$$r\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_3) + a\cdot\sin(\varphi_3-\alpha) + a\cdot\sin(\alpha-\varphi_2) = 0,$$
$$r\cdot\sin(\varphi_3-\varphi_1) + b\cdot\sin(\varphi_1-\beta) + b\cdot\sin(\beta-\varphi_3) = 0,$$
$$r\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2) + c\cdot\sin(\varphi_2-\gamma) + c\cdot\sin(\gamma-\varphi_1) = 0.$$

Diese Gleichungen gestatten eine wesentliche Umformung, die nur an der ersten durchgeführt zu werden braucht, weil aus ihr die folgenden durch cyklische Perumtation hergeleitet werden können. Nämlich durch Zusammenfassen der beiden letzten Glieder und Weglassen des Faktors $2\sin\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}$ ergiebt sich:

$$r\cdot\cos\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2} = a\cdot\cos\left(\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}-\alpha\right) \quad \text{und daraus}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2/_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_3/_2 - \frac{r - a\cos\alpha}{a\sin\alpha}}{\frac{r+a\cos\alpha}{a\sin\alpha}\cdot\operatorname{tg}\varphi_3/_2 - 1},\quad \text{folglich wenn man einführt:}$$

$$\frac{r - a\cos\alpha}{a\sin\alpha} = \alpha_1, \quad \frac{r - b\cos\beta}{b\sin\beta} = \beta_1, \quad \frac{r - c\cos\gamma}{c\sin\gamma} = \gamma_1,$$
$$\frac{r + a\cos\alpha}{a\sin\alpha} = \alpha_2, \quad \frac{r + b\cos\beta}{b\sin\beta} = \beta_2, \quad \frac{r + c\cos\gamma}{r\sin\gamma} = \gamma_2,$$

so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi_2/_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_3/_2 - \alpha_1}{\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_3/_2 - 1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_3/_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1/_2 - \beta_1}{\beta_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_1/_2 - 1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1/_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2/_2 - \gamma_1}{\gamma_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_2/_2 - 1},$$

und aus diesen Gleichungen $\operatorname{tg}\varphi_1/_2$, $\operatorname{tg}\varphi_2/_2$, $\operatorname{tg}\varphi_3/_2$ als Wurzeln quadratischer Gleichungen. **75.** Die drei zu erfüllenden Gleichungen werden hier, weil $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und $a = \lambda r$, $b = \mu r$, $c = \nu r$ sind:

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \lambda(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2) = 0,$$
$$\sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \mu(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_3) = 0,$$
$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \nu(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = 0, \quad \text{und hieraus}$$

$$\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} = \lambda\cdot\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} \text{ oder } \operatorname{tg}\varphi_2/_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_3/_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{folglich } \operatorname{tg}\varphi_1/_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_2/_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_3/_2 = \pm\sqrt{\frac{(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}} \text{ u. s. w.}$$

Numerisch. $\operatorname{tg}\varphi_1/_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_2/_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_3/_2 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{70}} = \pm 0{,}11952$,

$$u_1 = 26^\circ\, 53{,}3', \quad v_1 = 61^\circ\, 43{,}6', \quad w_1 = 280^\circ\, 9{,}8',$$
$$u_2 = 333^\circ\, 6{,}7', \quad v_2 = 298^\circ\, 16{,}4', \quad w_2 = 79^\circ\, 50{,}2',$$

die Lösungen sind identisch, oder wenigstens symmetrisch zur Axe. **76.** *OP* ist der Durchmesser des dem Viereck OPF_1F_2 umschriebenen Kreises, wenn F_1 und F_2 die Fusspunkte sind der von O auf G_1 und G_2 gefällten Lothe, und demnach ist

$$OP = d = \frac{\sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2 - 2p_1p_2\cdot\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}, \text{ und wenn}$$

man $\varphi_1 - \varphi_2$ durch δ bezeichnet: $\cos POX = \dfrac{p_2\cdot\sin\varphi_1 - p_1\sin\varphi_2}{d\cdot\sin\delta}$.

77. Ist *ABC* das durch die Linien $G_1G_2G_3$ gebildete Dreieck und bezeichnet man

$$\frac{p_1\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + p_2\cdot\sin(\varphi_3 - \varphi_1) + p_3\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)\cdot\sin(\varphi_3 - \varphi_1)\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = L,$$

so werden die Seiten des Dreiecks

$a = L\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_3)$, $b = L\cdot\sin(\varphi_3 - \varphi_1)$, $c = L\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ und der Inhalt Δ desselben:

$$2\Delta\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_3)\cdot\sin(\varphi_3 - \varphi_1)\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = L^2.$$

78. $L = 0$ (Aufg. 77) d. h.:

$$p_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + p_2 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + p_3 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

79. Für den Mittelpunkt O als Anfangspunkt und eine beliebige Axe seien die drei Seiten des Dreiecks durch ihre Coordinaten (wie in Aufg. 76 die Coordinaten der Fusspunkte der von O auf sie gefällten Lothe) a und α, b und β, c und γ gegeben und die Seiten des gesuchten Dreiecks seien bestimmt durch r und φ_1, r und φ_2, r und φ_3, so hat man zur Bestimmung der drei unbekannten Winkel φ_1, φ_2, φ_3 die Gleichungen (Aufg 78):

$$a \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + r \cdot \sin(\varphi_3 - \alpha) + r \cdot \sin(\alpha - \varphi_2) = 0,$$
$$b \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + r \cdot \sin(\varphi_1 - \beta) + r \cdot \sin(\beta - \varphi_3) = 0,$$
$$c \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + r \cdot \sin(\varphi_2 - \gamma) + r \cdot \sin(\gamma - \varphi_1) = 0,$$

welche fast identisch sind mit denen, durch welche das Fundamentalproblem von Gauss (Aufg. 74) gelöst ist: führt man auch hier ein

$$\frac{a - r \cdot \cos\alpha}{r \cdot \sin\alpha} = \alpha_1, \quad \frac{a + r \cdot \cos\alpha}{r \cdot \sin\alpha} = \alpha_2 \text{ u. s. w.},$$

so ergiebt sich, wie in Aufg. 74: $\operatorname{tg} \varphi_2/_2 = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi_3/_2 - \alpha_1}{\alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_3/_2 - 1}$ u. s. w.

80. Nimmt man die Axe senkrecht zu den gegebenen Linien an und den Mittelpunkt als Anfangspunkt, so ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und ferner seien $a = \dfrac{r}{\lambda}$, $b = \dfrac{r}{\mu}$, $c = \dfrac{r}{\nu}$ gegeben, so werden die zu erfüllenden Gleichungen dieselben wie in Aufg. 75, demnach ist auch die Lösung dieselbe. Dasselbe gilt für das numerische Beispiel, welches im Anschluss an Aufg. 75 gerechnet worden ist.

§ 38.

1. Die Anfangslage sei auf dem Radius ABC, nach t Sekunden habe A den Bogen AA_1, B den Bogen BB_1 zurückgelegt, so ist $A_1B_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) \cdot \dfrac{180\,t}{\pi}$, ein Maximum, $(a+b)^2$, für $t = \dfrac{\pi}{\alpha - \beta}\left(= \dfrac{(2k+1)\pi}{\alpha - \beta}\right)$, ein Minimum, $(a-b)^2$, für $t = \dfrac{2\pi}{\alpha - \beta}\left(= \dfrac{2k\pi}{\alpha - \beta}\right)$. **2.** Es muss sein $\cos\dfrac{180\,t}{\pi}(\alpha - \beta) = \dfrac{b}{2a}$. **3.** Gesetzt $\dfrac{a}{b} = m$, $\dfrac{\alpha}{\beta} = n$, Winkel $ACB = \psi$, so ergiebt sich $\cos\psi = \dfrac{1 + mn}{m + n}$. **3 a.** Der grösste Abstand (Aufg. 2)

ergiebt sich für $\psi \doteq 68° 49{,}9'$ d. i. $t = 1{,}9221$; ein Stillstandspunkt (Aufg. 3) für $\psi = 22° 10{,}5'$ d. i. $t = 0{,}62067$.

4. Gesetzt $a_0^2 + b_0^2 - 2 a_0 b_0 \cdot \cos\gamma = c_0^2$ und $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \cos\gamma = \delta^2$, so wird $AB^2 = c_0^2 - 2(\alpha b_0 + \beta a_0 - (\alpha a_0 + \beta b_0) \cdot \cos\gamma)\, t + \delta^2 t^2$, ein Minimum für $t_0 = \dfrac{\alpha b_0 + \beta a_0 - (\alpha a_0 + \beta b_0)\cos\gamma}{\delta^2}$; die kürzeste Entfernung wird $\pm \dfrac{(\alpha a_0 - \beta b_0)\sin\gamma}{\delta}$.

5. Gesetzt $h = \dfrac{c^2}{2g}$, so wird $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2h}{x_1} \pm \sqrt{\dfrac{4h(h - y_1)}{x_1^2} - 1}$.

6. Es muss sein $x_1^2 < 4h(h - y_1)$. **7.** $w = 2h \cdot \sin 2\alpha$; möglichst gross für $\alpha_0 = \pi/4$. **8.** $2\alpha_1 = \pi/2 + \beta$, $\alpha_2 = \pi/2 - (\alpha - \beta)$.

9. Es wird $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{y_2}{x_2} + \dfrac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$. (Vergl. § 17, Aufg. 67).

10. Es ist $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. **11.** $\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{x_1}{2h\cos\alpha^2}$.

12. $x_0 = h \cdot \sin 2\alpha$, d. i. gleich der halben Wurfweite (Aufg. 7), $y_0 = h \cdot \sin\alpha^2$.

13. $P_0 = 8{,}6023$, $(P_0 P_1) = 54° 27{,}7'$; **a.** $P_0 = 29$, $(P_0 P_1) = 43° 36{,}2'$.

14. $P_1 = 12{,}5$, $P_2 = 21{,}651$; **a.** $P_1 = 11{,}592$, $P_2 = 7{,}8506$.

15. **a.** $P_0 = 10{,}2$, $(P_0 P_1) = 79° 36{,}7'$. **b.** $P_0 = 6{,}3582$, $(P_0 P_1) = 28° 48{,}7'$.

16. $P_1 = 40{,}1$, $P_2 = 4{,}1$. **17.** $P_2 = 4{,}0825$, $P_3 = 5{,}5768$.

18. $(P_2 P_3) = 170° 28{,}4'$, $(P_3 P_1) = 106° 15{,}6'$.

19. $(P_2 P_3) = 121° 53{,}4'$, $(P_3 P_1) = 120° 2{,}2'$.

20. $P_1 = 34{,}73$, $P_2 = 39{,}493$.

21. $P_2 : P_3 = 1{,}8362$, $(P_1 P_2) = 82° 41{,}8'$.

22. $P_2 : P_3 = 1{,}6959$, $(P_1 P_2) = 86° 1{,}9'$.

23. $P_0 = 13{,}918$, $(P_0 P_2) = 3° 44'$;
a. $P_0 = 0{,}9936$, zwischen P_1 und P_3, $(P_0 P_1) = 12° 40{,}7'$.

24. $P_0 = 1{,}126$, zwischen P_1 und P_2, $(P_0 P_1) = 32° 38'$.

25. $P_1 = 71{,}744$, $P_2 = 33{,}145$. **26.** Vergl. Aufg. 28.

27. Die Resultante ist gleich $3r$ und hat die Richtung der Verbindungslinie von P mit dem Mittelpunkt M des Kreises. (Vergl. Aufg. 29.) **28.** Nimmt man den Mittelpunkt des Vielecks als Anfangspunkt und die Verbindungslinie desselben mit einem Eckpunkte als x-Axe, so heben sich die y-Componenten zu zwei auf; dasselbe gilt für die x-Componenten der Kräfte, wenn n

eine gerade Zahl, ist n ungerade, so wird deren Summe gleich $\sum_1^n \cos 2k\gamma = 0$. (Vergl. § 7, Aufg. 8). **29.** Bei Coordinaten wie in Aufg. 28 seien x, y die Coordinaten des Angriffspunktes, so werden die x-Componenten der Kräfte: $X_1 - x$, $X_2 - x$, . . $X_n - x$, wo X_1, X_2, . . X_n die x-Componenten in Aufg. 28 sind, folglich ist ihre Summe gleich $-nx$, ebenso wird die Summe der y-Componenten gleich $-ny$ und demnach die Resultante gleich nr u. s. w. wie in Aufg. 27. **30.** P ist der Schwerpunkt des Dreiecks. **31.** Der Ort ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt ist, und dessen Radius verdreifacht gleich ist der die Resultante darstellenden Linie. **32.** P ist der Mittelpunkt der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten. **33.** Der gesuchte Punkt ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. **34.** Der Schwerpunkt. **35.** **a.** $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$. **b.** $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$. **c.** $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ (vergl. Aufg. 33). **d.** $-\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$. **e.** $\operatorname{tg}\alpha/2$, $\operatorname{tg}\beta/2$, $\operatorname{tg}\gamma/2$. **36.** Der gesuchte Schwerpunkt ist zugleich der Mittelpunkt des Druckes für das Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Ecken die Mittelpunkte sind der Seiten des gegebenen Dreiecks und mit Gewichten belastet, welche den Gegenseiten proportional sind (Aufg. 33). Die Entfernung des Punktes von der Seite a ist $\dfrac{\varrho \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\alpha/2}$ u. s. w.

37. **a.** $r/3\sqrt{3}$. **b.** $r/2 \cdot \dfrac{\cos\pi/8}{\cos\dfrac{3\pi^2}{16}}$. **c.** $\dfrac{2r\varrho}{na+2r}$. **38.** $\dfrac{2r}{\pi}$.

39. Ist γ der zu den halben eingetragenen Sehnen $c/2$ gehörige Centriwinkel, so dass $n\gamma = \alpha$ ist und $\beta = \pi/2 - \alpha$ gesetzt, so wird die Momentengleichung:

$$nc \cdot x = r \cdot c \cdot \sum_1^n \sin[\beta + (2k-1)\gamma],$$

(vergl. § 7, Aufg. 7), d. i. $x = \dfrac{r\cdot\sin\alpha}{n\sin\gamma}$. **40.** $\dfrac{x}{r} = \dfrac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}$.

41. Entfernung von der Basis a: $\dfrac{a+2b}{a+b}\cdot h/3$, $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$.

42. $r/4 \operatorname{ctg}\pi/8$. **43.** $\frac{4}{3}\cdot\dfrac{r\varrho}{na}$. **44.** $\dfrac{4r}{3\pi}$. **45.** Lösung wie bei Aufg. 39; die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Kreises ist $\dfrac{a}{3n\sin\gamma}$, wo $n\gamma = \alpha$. **46.** $\dfrac{x}{r} = \frac{2}{3}\cdot\dfrac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}$.

47. $\frac{a^3}{12\,fl}$. **48.** Die Kräfte reduciren sich auf ein Kräftepaar mit dem Drehmoment $ab = 120$. **49.** Für die Seite b und die Höhe zu b als Coordinatenaxen ergiebt sich $P_0 = 17$, $\alpha_0 = 28°4'21''$ und als Gleichung der Geraden, in welcher die Resultante wirkt, $8x - 15y = 84$. **50.** Nimmt man AB als x-Axe, A als Anfangspunkt, so ergiebt sich a. das Kräftepaar mit dem Drehmoment $-\frac{3}{2}P\sqrt{3}$; b. $P_0 = \sqrt{7}$, $\cos\alpha_0 = \frac{-2}{\sqrt{7}}$; Gleichung der Geraden, in welcher die Resultante wirkt: $x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot y + 4 = 0$. **51.** Für den Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt und den Radius MA als Abscissenaxe wird die Resultante $P_0 = 2{,}0048$, $\alpha_0 = 41°33{,}9'$, und die Gleichung der Geraden, in welcher die Resultante wirkt, $1{,}5\,y - 1{,}33\,x = 12\,r$. **52.** $P_3 = 25{,}368$, $\alpha_3 = 44°48'$ (für a und h_a als Coordinatenaxen); Drehmoment gleich 343,5. **53.** $67°\,22{,}8'$. **54.** $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{a_1 + b_1}{a + b}$. **55.** Die Einfallswinkel sind die Complemente der Winkel A_0 und B_0 eines Dreiecks $A_0B_0C_0$, in welchem die Seiten $a_0 = \frac{a + b + 2\,b_1 \cos\gamma}{\sin\gamma}$, $b_0 = \frac{a_1 + b_1 + 2a\cos\gamma}{\sin\gamma}$ und Winkel $C_0 = \gamma$ sind. **56.** Die gesuchten Winkel sind die eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $2c$ und $2a$, oder $2(a - c)$ und $2a$, oder $2b$ und $2a$, oder $2(c - b)$ und $2a$. **57.** a. $2r\cdot\sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$; b. $2r\cdot\sin\frac{\alpha + \beta + 3\gamma}{2}$; c. $2r\cdot\sin\frac{\alpha + \beta + (2k - 1)\gamma}{2}$.

58. Der Einfallswinkel ist gleich $\pi/2 - \alpha$, und $\frac{FB}{PB} = \cos 2\alpha$.

59. $\frac{FB}{PB} = \frac{2r\cos\alpha^2 + b\cos 2\alpha}{b + d\cos\alpha}$, wo $d = 2(a - r)\cos\alpha$ ist.

60. $AE = 1{,}5428$, $BE = 3{,}4572$; Einfallswinkel gleich $65°27{,}7'$.

61. Ist F, wie in Aufg. 58, der Schnittpunkt des rückwärts verlängerten reflektirten Strahles mit a_1, so wird

$$\frac{CF}{b_1} = \frac{a_1\cdot\sin\gamma - d\cos\alpha}{b_1\sin\gamma + d\cos\beta},\ \text{wo}\ d = 2(a_1 - a)\cdot\cos\beta.$$

62. $\sin\varphi = \frac{r \pm\sqrt{r^2 + 8a^2}}{4a}$; ist u der Winkel, welchen der ein-

fallende Strahl mit der Tangente am Einfallspunkte bildet, so ist $a \cdot \cos 2u = r \cdot \cos u$. **63.** $t = e + nd$, $t_1 = DF + n \cdot EF$, wo $DF = \frac{e \cdot \cos\alpha}{\cos(\alpha - \delta)}$, $EF = \frac{d \cdot \cos\beta}{\cos(\varepsilon + \beta)}$ und $\sin\alpha = n \sin\beta$; $t = 11$, $t_1 = 11{,}406$. **64.** (Vergl. Jochmann Phys. § 176.) Man schneide von DC das Stück $DG = DF$ ab, construire über GC als Sehne einen Kreis, welcher das Einfallsloth $L_1 L_2$ zur Tangente hat, dessen Mittelpunkt M also auf AB liegt, verlängere EC rückwärts über C bis zur Peripherie in H, so liegt F ausserhalb des Kreises um M, weil Winkel $IGC = \pi/2$ und demnach GI Tangente ist des Kreises FG um D als Mittelpunkt; folglich ist $FHC > \pi/2$ und im Dreieck FHE die Seite $FE > HE$. Nunmehr ist im Dreieck CGH Winkel $G = HCL_1 = \beta$ und $H = GCL_2 = \pi - \alpha$, folglich verhält sich $GC : HC = \sin\alpha : \sin\beta$; demnach wird eine Strecke $= HC$ unterhalb AB vom Licht in derselben Zeit zurückgelegt als GC oberhalb AB. Weil nunmehr, wie eben bewiesen ist, $FE > HE$ und $HE = HC + CE$, so legt das Licht die Strecke FE im dichteren Medium in längerer Zeit zurück, als die Strecke GC im dünneren und dann CE im dichteren Medium. Im Uebrigen ist $DG = DF$, so dass der Beweis geführt ist. **65.** $x = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{n \cos\beta}$, 0,25615. **66.** 22° 34,9′.

67. Es ist $\sin(\theta + \alpha) = n \cdot \sin\alpha$ und $h = d \cdot \operatorname{tg}\theta$; $\theta = 11° 48{,}6'$, $h = 20{,}467$. **68.** $n = 1{,}4555$. **69.** $f \cdot \sin\varepsilon_0 + e \sin\theta_0 = nc$, wo $c = \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef\cos\gamma}$, $\varepsilon_0 = 21° 42{,}2'$, $\theta_0 = 67° 35{,}6'$.

70. $n = 1{,}4422$. **71.** $\frac{f}{e} = \frac{(n^2 - 1)\cos\gamma \pm \sin\gamma\sqrt{n^2 - 1}}{n^2 \cos\gamma^2 - 1}$, $= 0{,}78456$, $\varepsilon_0 = 27° 55'$. **72.** $f = 0{,}8062$. **73.** Es ist

$$\sin\varepsilon_0^2 + 2\sin\varepsilon_0 \cdot \sin\theta_0 \cdot \cos\gamma + \sin\theta_0^2 = \sin\gamma_0^2,$$

wo $\sin\gamma_0 = n \sin\gamma$. Zur Construktion multiplicire man beide Seiten etwa mit $4r^2$ und führe ein $2r\sin\varepsilon_0 = e_0$, $2r\sin\theta_0 = f_0$, $2r\sin\gamma_0 = c_0$, so ergiebt sich $e_0^2 + 2e_0 f_0 \cos\gamma + f_0^2 = c_0^2$ u. s. w. Ein Minimum der Ablenkung tritt ein, wenn $\varepsilon_0 = \theta_0$, (§ 35, Aufg. 53).

74. $RV = 6{,}608$ cm. **75.** **a.** $a = 1{,}5119\,r$; **b.** $b = 1{,}1339\,r$; **c.** $\operatorname{tg} x = \frac{\mu \cdot \operatorname{ctg}\beta_0}{\lambda + \mu}$, wo $\sin\beta_0 = \frac{3}{4}$ ist. **76.** $\cos\alpha = \frac{(1 - \lambda^2)n^2 - 1}{2\lambda n}$, $\alpha = 75° 31{,}3'$. **77.** $b = \frac{r \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, wo $\sin\alpha = n \sin\beta$.

78. $\alpha = 82^\circ 49' 9''$. **79. a.** $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta^2}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, wo $\sin\alpha = n \sin\beta$; **b.** $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}(\varphi - \pi/4)$, wenn $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu \sin\alpha}{\lambda \sin\beta}$. **80.** $b = \frac{a r \cdot \cos\alpha}{a \cos v\,(n\cos\beta - \cos\alpha) - n r \cdot \cos\beta}$, wo $\sin\alpha = n \sin\beta$; — für den Grenzwerth b_0 ergiebt sich $\frac{n-1}{r} = \frac{n}{a} + \frac{1}{b_0}$. (Vergl. Jochmann Phys. § 155).

81. $CQ = \frac{r \sin\alpha}{\sin(2\alpha - 2\beta - \omega)}$, wo $a \sin\omega = r \sin\alpha$ ist.

82. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta - \omega/2) = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; verlängert man den einfallenden und den austretenden Strahl bis zu ihrer Durchschneidung im Punkte O, so ist OC die Halbirungslinie des Winkels POQ: woraus die Construktion sehr einfach.

83. a. $\delta = 28^\circ 5{,}8'$; **b.** $\delta = 42^\circ 1{,}6'$. **84. a.** $\delta = 107^\circ 51' 15''$; **b.** $\delta = 50^\circ 58{,}8'$. **85.** Es wird $3 \operatorname{ctg}\beta^3 - 4 \operatorname{ctg}\beta^2 - 9 \operatorname{ctg}\beta = 4$, wo $\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\beta$, d. h. $\alpha = 28^\circ 2{,}9'$. **86.** $\alpha = 59^\circ 23{,}5'$.

87—89. Es sei δ der Einfallswinkel, ε der Austrittswinkel, b die Entfernung des Punktes B von der zweiten Linsenfläche, jenachdem (a) die Kugelfläche mit dem Radius r_1 dem Punkte A näher oder (b) ferner liegt als die Kugelfläche mit dem Radius r_2:

87. a. $\delta = 14^\circ 2{,}2'$, $\varepsilon = 47^\circ 44{,}6'$, $b = 3{,}799$.
b. $\delta = 46^\circ 41{,}2'$, $\varepsilon = 5^\circ 27{,}2'$, $b = 5{,}0909$.

88. a. $\delta = 15^\circ 9{,}4'$, $\varepsilon = 20^\circ 47'$, $b = 5{,}4716$.
b. $\delta = 18^\circ 38{,}2'$, $\varepsilon = 16^\circ 59{,}1'$, $b = 5{,}4658$.

89. a. $\delta = 5^\circ$, $\varepsilon = 35^\circ 30{,}1'$, $b = (-)\,2{,}2467$.
b. $\delta = 8^\circ 21{,}1'$, $\varepsilon = 31^\circ 3{,}2'$, $b = (-)\,2{,}4244$.



Druckfehler.

Seite 2 Zeile 5 von oben lies 8,89598 statt 9,89598.

„ 2 „ 17 von oben lies 9,02468 statt 0,02468.

„ 4 „ 1 von unten lies $\cos 54^0$ statt $\sin 54^0$.

„ 9 „ 14 von oben lies Aufg. 35 statt Aufg. 32.

„ 10 „ 5 von oben lies $\sin \beta/2$ statt $\cos \beta/2$.

„ 10 „ 7 von oben lies $-4 \cos \alpha/2$ statt $+4 \cos \alpha/2$.

„ 10 „ 1 von unten vertausche die Vorzeichen der beiden letzten Glieder.

„ 21 „ 1 von oben lies $+\cos(2x-\beta)$ statt $-\cos(2x-\beta)$.

„ 21 „ 12 von oben fehlt: wenn $\alpha = 30^0$, $\beta = 45^0$.

„ 24 „ 12 von oben lies 50^0 statt 70^0.

„ 24 „ 11 von unten lies $\sin(y-x)$ statt $\cos(x-y)$.

„ 47 „ 4 von oben lies 100^0 statt 300^0.

„ 52 „ 6 von unten lies k_c statt k_a.

„ 52 „ 5 von unten lies k_a statt k_c.

„ 74 „ 18 von oben lies a statt b.

„ 95 „ 5 und 6 von oben lies der Mittelpunkte statt des Mittelpunktes.

„ 125 gehört Aufg. 27 hinter Aufg. 29.

„ 160 Zeile 3 von unten lies $\alpha = 5^0$ statt $\alpha = 10^0$.

„ 169 „ 8 von oben lies $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ statt $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

„ 176 „ 12 von oben in 20a lies 37^0 statt 27^0.

„ 184 „ 9 von unten lies x_2 statt $x2$.

„ 217 „ 5 von unten lies $\mathrm{tg}\,\gamma^2$ statt $\mathrm{tg}\,\gamma/2$.

Druck von W. Pormetter in Berlin C., Neue Grünstrasse 30.

Verzeichniss
der
im Verlage von Winckelmann & Söhne, Berlin
erschienenen
Lehrmittel und Schulbücher.

Neue Bilder für den Anschauungs- und Sprachunterricht. 6 Bilder (71 cm. hoch, 84 cm. breit). Preis à Mk. 3,—.

— — Auf Leinwand mit Rollen. Preis à Mk. 6.

No. 1. Frühling (der Mensch und die Hausthiere). No. 2. Der Wald. No. 3. Sommer. No. 4. Herbst. No. 5. Winter. No. 6. Menschenverkehr.

Strübing, F., Sprachstoff zu den Bildern für den Anschauungs- und Sprachunterricht. 3 Hefte. Für je 2 Bilder 1 Heft. Preis à Mk. —,50.

August, F., Dr. phil., Oberlehrer. Die Elemente der Arithmetik für die Mittelklassen höherer Schulen und zur Repetition in den oberen Klassen zusammengestellt. Preis Mk. 1,—.

Hermes, Prof. Dr. **O.**, Sammlung von Aufgaben. I. Theil. Elementaraufgaben aus der Algebra. Preis Mk. 1,60.

— Sammlung von Aufgaben. II. Theil. Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und niederen Analysis. Preis Mk. 2,—.

Jochmann, E., Grundriss der Experimentalphysik. Vermehrt um Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie von O. Hermes. Mit 340 Holzschnitten. Fünfte verbesserte Auflage. Preis Mk. 4,50.

Daraus in Separatausgabe:

Hermes, Prof. Dr. **O.**, Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. Mit 44 Holzschnitten. Preis Mk. 1,—.

Kletke, E., Hülfsmittel für Benutzung der Bilder für den Anschauungs- und Sprachunterricht bei der französischen Conversation. Preis Mk. —,75.

Martius-Matzdorf, J., Die interessantesten Erscheinungen der Stereoskopie in 36 Figuren mit erläuterndem Text und 6 in den Text eingedruckten Holzschnitten populär dargestellt. Preis Mk. 2,40.

— — Zwölf Darstellungen des stereoskopischen Glanzes an Krystallformen. In Etuis. Preis Mk. 3,—.

Natani, L., Methode der kleinsten Quadrate. Mit den Hülfssätzen aus der Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst einem Anhange über die ballistische Linie. Preis Mk. 1,—.

Quincke, G., Prof. in Heidelberg, Darstellung von Schwingungen für physikalische Vorlesungen mittelst eines stroboskopischen Cylinders. Preis Mk. 4,50.

Strahlendorff, L., Gründliche Anweisung zur Erlernung einer schönen und geläufigen Handschrift, in 24 Lectionen für den Schul- und Selbstunterricht. Vierte Auflage mit 36 in Stein gravirten Tafeln. Preis Mk. 4,—.

— Die Entwickelung der Schrift und des Schreibunterrichts in der neueren und neuesten Zeit. Preis Mk. 1,50.

Vogel, O., K. Müllenhoff u. F. Kienitz-Gerloff, Leitfaden für den Unterricht in der Botanik nach methodischen Grundsätzen. Mit 5 Tafeln.

Heft	I.	(Cursus 1 u. 2).	cart.	Mk.	1,20.
„	II.	(„ 3 u. 4).	„	„	1,20.
„	III.	(„ 5 u. 6).	„	„	1,—.

— — Leitfaden für den Unterricht in der Zoologie nach methodischen Grundsätzen.

Heft	I.	(Cursus 1 u. 2).	cart.	Mk.	1,20.
„	II.	(„ 3 u. 4).	„	„	1,20.
„	III.	(„ 5 u. 6).	„	„	1,—.

Zettnow, Dr. E., Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse ohne Anwendung von Schwefelwasserstoff und Schwefelammonium. Mit Holzschnitten und einer Spectraltafel. Preis Mk. 2,40.

Vorlagen für den Zeichenunterricht.

Archiv für Ornamentale Kunst. Herausgegeben mit Unterstützung des **Königl. Preuss. Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten.** Redigirt durch Martin Gropius, Prof. u. Director an der Königl. Kunst- und Gewerk-Schule in Berlin. In 12 Heften. Preis à Mk. 3,—.

Bräuer, A., Vorlegeblätter für den Zeichenunterricht. Herausgegeben mit Unterstützung des **Königl. Preuss. Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten.** 40 Wandtafeln im Format von 63/87 cm. mit Text. Preis Mk. 20,—.

Jacobsthal, E., Die Grammatik der Ornamente. Nach den Grundsätzen von K. Bœtticher's Tektonik der Hellenen bearbeitet und herausgegeben mit Unterstützung des **Königl. Preuss. Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten.** 7 Hefte à 20 Blatt, mit Text. Preis à Mk. 9,—.

Wandtafeln des Vereins zur Förderung des Zeichenunterrichts. Mittelstufe. (10 Wandtafeln und 1 Anschauungsblatt in Farbendruck, nebst illustrirtem Text.) Preis Mk. 15,—.

Ausser obigen Vorlagen erschienen in unserm Verlage eine grosse Reihe von Heften kleineren Formats mit Vorlagen für Figuren-, Landschafts- und Thierzeichnen, so wie mit einfachen und schwierigeren Geräthschaften u. s. w.